大学数学自学指南

DAXUE SHUXUE ZIXUE ZHINAN

赵根榕　朱鼎勋主编

中国青年出版社



社目96—68

书号 13009·292

定价 0.67 元

大学数学自学指南

赵慈庚　朱鼎勋 主编

中国青年出版社

封面设计：李芳芳

大学数学自学指南

赵慈庚　朱鼎勋　主编

*

中国青年出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092　1/32　8.75印张　138千字

1984年9月北京第1版　1984年9月北京第1次印刷

定价0.67元

内 容 提 要

本书是为有志于自学大学数学课程的读者编写的。全书分十四章，总论叙述了数学的作用、特点和发展概况，提出了学好数学的一般方法，介绍各类大学数学专业的课程设置，使读者对数学专业有所了解，后面十三章分别对空间解析几何、数学分析等各门课作深入的学习指导。分析各门课的特点、难点，对自学读者学习注意事项、选择自学课本、学时安排等学习进度和习题选作也都作了提示。内容详尽，通俗易懂。本书是自学读者的"良师"。

前　言

青年人有志于学习高等数学，却没有机会进入大学读书，已经是件憾事；无师可承而自学数学，略有一点经验的人都知道其中的苦恼；我们出于同情的心理，用自己的经验写了这个小册子。主观上希望对读者有一点帮助。

我们以为在学习大学数学具体课程之前，应该对整个数学的概况有一点了解，为此我们开头写了总论。

数学和物理、化学同属于自然科学，然而数学另有自己的特点。物理、化学都没有初等高等之分，从中学到大学没有分界的鸿沟；而学习数学却不能不分两步走。中学时期讲初等数学，侧重在具体实用。大学里的高等数学，为了应用广泛，必须概括得宽阔，因此而立论抽象，往往超出生活常识。在这极度抽象之中进行逻辑推理，是许多人不大习惯的。所以用初等数学的学习态度对待高等数学，没有不失败的。很多热气腾腾的青年刚走到高等数学的门前，便望而却步了。学习大学数学不先扭转学习意识，大概是不会有好效果的。在总论中提出了数学的特点，同时谈了大学数学的一般学习方法。

数学现在已是分支众多的学科，我们根据现行教学大纲列出十三门课程详加分析。在大学数学系基础课程里只缺《泛函分析》没有列入。因为它是基础课的最后课程，假若

以前各科学得好，就能领会学习数学的规律，不需要过细的指导了。

各科的学习顺序，应该参考“总论”中大学数学系《专业科目和时间安排》表。具体情况，自学的读者可灵活掌握，本书的安排只供参考。

赵慈庚　朱鼎勋

1982年十一月

目　次

总　论

赵慈庚

一　数学的作用和特点

数学属于自然科学，它是一切科学技术的基础。立志自学大学数学的读者，不但对数学研究要培养浓厚的兴趣，而且必须对数学在发展国民经济和科学技术方面的作用有一定的了解。

初等数学在中小学课程里的重要性是人所共知的。高等数学的基础部分，除了数学专业之外，既是理工科的重要基础，又是其他许多非理工科专业的基础。也可以说，没有数学基础，就难以学好自然科学领域的各门学科。

现在的科学技术比较复杂，但是它们都有共同的地方，那就是它们的研究和发展都离不开数学。同时，科学技术的发展又反过来促进数学的发展。

和其他学科比较，数学的特点是：抽象性、准确性和运用广泛性。数学的抽象是一步步提高的，把客观具体事物和数分离，比如从三个苹果分离出 3，这是第一步抽象，用字母代替数是从抽象所得的数再抽象，用字母作运算，抽象程度便又加深一步。抽象的过程就是数学发展的过程。数学的准确性就是它的逻辑的严密性，数学的结论要求是确定的，

而这种确定性的结论，只有通过严密的逻辑推理才可能获得。数学在自然科学领域里，几乎无所不及，现在就连社会科学的许多领域也都需要数学了。可以这样说，不论是工业、农业，还是国防、贸易，也不论是科学研究，还是工程技术，很难找出哪一个部门、哪一个行业是和数学无关的。这就是数学应用的广泛性。

二 数学的发展

数学产生于生产实践，考古学证明，早在四五千年以前，人类就已经在生产实践中积累了许多零散的、片断的数学知识。中国、巴比伦、埃及和印度这四个文明古国的史料说明，公元前两千多年前，就已产生了算术、代数和几何的初步知识。我国在三千多年前的商代就已使用十进位的数了。两千多年前，我国就有《九章算术》这样的数学专著，书里已经有了一次方程组的解法。至于几何方面，另一部书《周髀算经》记载的内容就更早了。巴比伦、埃及和印度的古代数学也有许多光辉的成就。

在数学发展史上应该提出的是古希腊，大约在公元前五世纪左右，古希腊的文化发展昌盛一时，随着生产的发展，天文学、航海、贸易得到了很大的发展，同时也促进了数学的发展。欧几里得在总结前人知识的基础上，写出了《几何原本》这部流传至今的不朽著作，这也是一部最早的、内容最丰富、最系统的数学巨著。

到了十六世纪，已经是欧洲的文艺复兴时期，数学取得了许多新的进展。工业革命使生产力突飞猛进，机械、造船、建筑、交通、天文、开矿、冶炼等许多新的领域不但需要力

学、物理学和化学的知识，同时需要处理实践中出现的变化现象，这就需要引入变量，这是数学发展的一次大突破。法国数学家费尔马和笛卡儿创立的解析几何，英国科学家牛顿和德国科学家莱布尼茨创立的微积分是数学发展史上光彩夺目的成就之一。从此，数学发展进入了一个转折时期。

二十世纪四十年代，电子计算机的出现，标志着数学的发展又进入了崭新的时期。随着现代科学技术的迅速发展，数学已渗透到许多新的领域里，并和别的学科密切结合，产生了新的边缘学科和综合性学科。现在，数学的分科越来越细，形成了分支众多、内容丰富、应用广泛的学科。

三 学习大学数学的方法

大学的数学更加抽象，要学好数学还要注意学习方法。

许多青年从中学升入大学以后，在一段时期里，对于大学数学的学习方式很不习惯，其中原因，一是大学的学习任务比中学重，二是用中学的学习习惯来学大学数学，这样就很不适应。大体说来，中学数学内容接近于常识，其中的许多理论好象仅仅是把许多常识系统化了，或者逻辑化了。因为它和常识接近，有些人不十分注意逻辑系统，再加上中学数学教材的逻辑推理本来不多，这样，有些人就误以为数学只是讲计算方法的，于是以为会计算就是懂得数学了。大学的数学不同，它不用常识，甚至要我们抛开常识而从纯逻辑上去认识其中的规律，这大概就是初学大学数学的时候往往感到困惑的原因。自学大学数学因为没有人指导，难免因此降低兴趣，或失掉信心，以至望而生畏。所以要先坚持一个时期，闯过第一道关口。

自学是有困难的，为什么要自学？目的一定要明确。学习是为了获得知识，改造自然，服务人类。有了这样高尚的情操，就能在自学中有持久的毅力。

选择数学专业要考虑到自己的个性，比如你平时乐意钻研数学问题，当然你一定喜欢逻辑思维，这就是你的个性。这显然也牵涉到兴趣。如果有这样的基础，对于自学当然是好的。不过，所谓个性和兴趣不是绝对的。你认识到学习数学的需要，兴趣可以从认真钻研中培养起来的。

任何事情都没有一定的成功之路，学习也不例外。怎样自学好大学的数学，也没有一套固定的方法，下面提出的几点也只是提供自学读者作参考。

第一，要认真领会概念、定义等的含意，不可丝毫马虎。数学中的文字十分严格，一字之差，影响极大。自学的时候必须字字斟酌，认真领会定义、概念、定理，不能一知半解，而要真正理解。

第二，要善于积累知识。丰富的知识是积累得来的。学习的时候，常常有人说在某部分教材中，这是重点，那是难点。自学的读者千万不要因此而只注意这些重点和难点。所谓重点，无非是它牵涉的问题多，所谓难点，无非是理论上比较复杂、难于分析和理解的部分。重点和难点一定要弄懂弄通，但是只用这些重点和难点架设不成数学的大厦。学习数学不能放过论证中的任何细节，大小道理都要弄懂。

第三，要加强复习。俗话说，“温故而知新”。只有常常复习功课，才能使已学得的知识不易忘掉。对于教材的内容，每看完一章或一大段后，要把这章或这段的理论系统地回顾几次，要求做到不看书本记清各定理之间的联系，甚至

每个定理的证明。对于相似证法的定理，对于有从属关系或对等关系的概念，都要进行对比，以分清异同，正确理解它们。

第四，通过解题来复习知识和锻炼思维能力。解题是学习数学重要的一环。每本教材都有大量的习题，一类习题能使读者增强计算能力，复习学过的知识，记忆一些公式、定理；一类习题能使读者锻炼思维能力，开动脑筋从逻辑判断上去进行推理和证明。在做练习题的时候，要多方面联系，看清了一道题的题设和题断，就要回忆和这问题有关的定理、定义、法则、公式，看看其中哪些能沟通问题的题设和题断。特别情况比一般情况总要简单一些，解题的时候，可以从特例着手。从特例的解法，往往可以推广到一般情况。

第五，解题后要善于小结。每做完一部分复习题，都要进行一次小结。要想想这些题的解法是否是最好的，能不能再简化；叙述得是否通畅，头绪纷繁的思路要使别人看起来很顺利，哪些问题是应该先说的，哪些问题是应该后说的，等等，在自己解题过程中是否都弄好了；最后要小结一下自己的解法能否推广，这些推广可以作为自己进修的资料连同证明记录下来。

上面所提各点，都是泛泛之谈，结合各分支教材怎样学好，后面各章还要叙述，这里就不作介绍了。

四 各类大学数学课程设置概况

各类大学由于培养目标不同，课程的设置也就不同。为了让自学青年对大学数学课程设置有所了解，现在把综合大学数学系、高等师范院校数学系、工科院校的数学课程和应用

数学专业的教学计划，摘录出来，以供参考。政治、体育、外语是国家规定的公共必修课，各校都一样，因此没有列在表里。教学计划中的专业课程，由各校自己安排，所以同一类学校、同一种专业，设置的课程还有不同，尤其是选修科目差异比较多。

课程设置、教材内容和教学要求，都要跟着时代前进，所以这一切规定都不是一成不变的，读者也应该注意到这一点。

（一）综合大学数学系数学专业教学计划

1． 培养目标：

本专业培养德、智、体全面发展的从事数学方面的教学、科研和其他实际工作的专门人材。具体要求是：掌握本专业所需要的基础理论、基本知识和基本技能；具有一定的专门知识，了解一些和本专业有关的科学技术新发展；获得从事科学研究的初步训练，具有较强的自学能力和一定的分析问题、解决问题的能力；能用一种外国语阅读本专业的书刊。

2． 修业年限：四年。

3． 专业科目和课时安排表：（见下页）．

下页表里每周学时分配八栏中，只写一个数字的，是每周讲授（或实验）学时数。两数字相加的，其中第一个数字是每周讲授学时数，第二个数字是习题课学时数。如一年级下学期数学分析每周学时“４＋２”，表示每周讲授４学时，习题课２学时。

表里最后六门课程（从偏微分方程到微分几何）是第一组限制性选课，每个学生必须在这六门中选学四门。

课程	学时总数	学时分配			各学期每周学时分配							
		讲授	习题课	实验	一年级		二年级		三年级		四年级	
					上学期	下学期	上学期	下学期	上学期	下学期	上学期	下学期
数学分析	238	136	102		4+4	4+2						
数学分析	153	102	51				3+2	3+1				
解析几何	102	68	34		4+2							
线性代数	153	102	51			4+2	2+1					
物理	170	170				2	4	4				
物理实验	102			102			2	4				
常微分方程	85	68	17					4+1				
复变函数	85	68	17						4+1			
实变函数	85	68	17						4+1			
偏微分方程	68	68							4			
泛函分析	68	68								4		
抽象代数	68	68								4		
拓扑学	68	68									4	
概率统计	68	68								4		
微分几何	68	68									4	

还有第二组限制性选修课程十几门，每门讲授51学时，设在四年级，每个学生必须选学其中三门。

（二）高等师范院校数学系数学专业教学计划：

1．培养目标：

本专业的主要任务是培养德、智、体全面发展的中等学校数学教师。本专业毕业生根据国家需要，也可以从事高等学校教学和科学研究工作。具体要求是：掌握本专业所必需的基本知识、基本理论和基本技能；具有较强的自学能力和独立工作能力；获得科学研究的初步训练，尽可能地了解和本专业有关的科学技术新发展、新成就；懂得教育科学，具有从事中等教育和教学工作的初步能力；能用一种外国语阅读本专业的外文书刊。

2．修业年限：四年。

3．专业科目和课时安排表：（见第9页）

表里从实变函数以下九门是必选课，每个学生在三四年级两年内必须选学其中六门，这六门中要有一门是几何。此外还有十几门选修课，开设在三四两年级，每个学生至少选学其中四门。

此外还有全校性必修课心理学和教育学两门，分别开设在三年级上下学期，每周讲授2学时，总共各讲36学时。

四年级下学期有教育实习四周。

（三）工科院校应用数学专业教学计划：不同院校的应用数学专业，由于方向不同，教学计划的差别比较大。这里选择一个作为参考。

1．培养目标：

本专业培养德、智、体全面发展的应用数学研究人材。具体要求是：业务上要具有应用数学专业所需要的比较宽厚的基础理论知识，掌握应用数学某一学科方面的基本知识和

课程	学时总数	学时分配			各学期每周学时分配							
					一年级		二年级		三年级		四年级	
		讲授	习题课	实验	上学期	下学期	上学期	下学期	上学期	下学期	上学期	下学期
空间解析几何	90	72	18		4+1							
高等代数	198	145	53		4+2	4+1						
数学分析	337	248	89		4+2	4+1	3+1	3+1				
普通物理	180	144		36		4+1	4+1					
常微分方程	76	76					4					
复变函数	68	68						4				
概率	51	51						3				
算法语言	36	24		12				2				
教材教法	60	60									4	
实变函数	72	72							4			
微分几何	72	72							4			
高等几何	54	54									3	
理论力学	54	54								3		
计算方法	72	72								4		
偏微分方程	72	72									4	
泛函分析	72	72									4	
拓扑	72	72								4		
抽象代数	54	54									3	

课程	学时总数	学时分配			各学期每周学时分配							
		讲授	习题课	实验	一年级		二年级		三年级		四年级	
					上学期	下学期	上学期	下学期	上学期	下学期	上学期	下学期
普通物理	202	202				5	5					
解析几何	70	70			4							
数学分析	332	296	36		5	5	4	4				
高等代数	163	145	18		5	4						
常微分方程	86	86						4				
近世代数	48	48					3					
电工及电子学	64	64						5				
复变函数	78	78							4			
实变函数	78	78							4			
数值分析	78	78							4			
理论力学	154	154							4	4		
算法语言	45										2	
技术课	118										4	4
分组必修课	117～265										6～9	6～9
偏微分方程	76	76									4	
泛函分析	76	76									4	
概率	76	76									4	
任选课	0～118										0～4	0～4

一些技术科学方面的知识，能使用电子计算机，受到科学研究的初步训练，有较强的自学能力和独立工作能力，能运用所学知识解决工程技术所提出的一般数学问题；能用一门外国语阅读本专业方面的书刊。

本专业毕业生主要在工矿企业和国防部门中的科研单位以及学校从事数学应用研究工作，也可以从事数学教学工作。

2． 修业年限：四年。

3． 专业科目和课时安排表：（见第10页）

四年级下学期上课11周，毕业论文8周。

任选课有微分几何、控制论、数理逻辑。此外还有加选课八门，每周四学时，各讲授一学期。

四年级的技术课，根据分组后的需要来确定。

（四）工科院校的数学课程：工科院校设置数学课程是为了学习或研究工程技术中的理论问题。它是工程专业的工具课，也是基础知识。它只讲授工程技术中有用的数学方法，不需要系统地研究抽象理论。教材分两大部分，叫做《高等数学》和《工程数学》。

第一，高等数学：

1． 课程的目的和任务：高等数学在工科院校的教学计划中是一门重要的基础理论课，为培养高级工程技术人材的目标服务。通过这门课程的学习，使学生获得微积分（包括向量代数和空间解析几何）和常微分方程的基本知识、必要的基础理论和常用的运算方法。注意培养学生的比较熟练的运算能力、抽象思维能力、逻辑推理能力、几何直观和空间想象能力；从而使学生受到数学分析方法和运用这些方法解

决几何、力学和物理等实际问题的初步训练，为学习后继课程和进一步扩大数学知识奠定基础。

2． 开设时期：一年级。

3． 教材内容和课时分配：

教 材 内 容	课时总数	课时分配	
		讲 授	习题课
微 积 分	148～156	108～116	40
向量代数和空间解析几何	22	16	6
常数项级数、幂级数、函数项级数	20～24	14～18	6
傅立叶级数	6	6	
常微分方程	20～22	14～16	6
合 计	216～230	158～172	58

第二，工程数学：

1． 课程的目的和任务：工程数学是工科四年制各专业继高等数学之后的一门基础课。通过这门课程的学习，使学生获得线性代数、概率论、复变函数等基本知识和必要的基本运算技能。同时使学生在用数学方法分析问题和解决问题的能力方面得到进一步的培养和训练，为学习有关专业课程和扩大数学知识提供必要的数学基础，为培养高级工程技术人材服务。

2． 开设时期：二年级。

3． 教材内容和课时分配：

教　材　内　容	课时数
线性代数	30～32
概率论	28～32
复变函数	24～30
贝塞尔函数和勒让德多项式	10～12
数学物理方程	16～18
傅立叶变换和拉普拉斯变换	12～14
场　论	10～12
合　计	130～150

（五）各类学校数学教材的对比：各类学校由于学习目的不同，同一门课程的教材内容和教学要求也有所不同。具体情形在各科教学大纲里都有明确规定，对于教学要求也或详或略地附有说明，我们不能把教学大纲都抄录下来。为了让读者知道一点这方面的情况，从各类学校微积分教学大纲中摘录一部分内容对比一下。

1．各类学校微积分课程的目的和任务。

在综合大学数学专业和计算数学专业里，微积分课程是数学系数学、计算数学专业的一门重要基础课。它一方面为后继课程如微分方程、复变函数、微分几何、实变函数、泛函分析、概率论、普通物理、理论力学等基础课以及有关选修课程提供所需要的基础，同时还为培养学生的独立工作能力提供必要的训练。学生学好这门课程的基本内容和方法，

对今后的学习、研究和应用都具有关键性的作用。

在高等师范院校数学专业里，微积分课程是一门重要基础课。它的任务是使学生获得极限论、一元函数微积分学、无穷级数和多元函数微积分等方面的系统知识。本课程是进一步学习复变函数论、微分方程、微分几何、概率论、实变函数论和泛函分析等后继课程的阶梯，也为深入理解中学数学打下必要的基础。

在工科院校里，开设的高等数学和工程数学的目的和任务，前面已作了叙述。

2. 各类学校微积分中极限理论教学内容的比较：

教材	综 合 大 学	高 师 院 校	工 科 院 校
实数的结构	从初等数学已有的知识直观地说明实数的代数结构、顺序结构、拓扑结构，完备性作为公理承认。	实数理论作为教材的附录。	不讲。
实数的基本定理	确界的存在定理、单调有界必有极限、子列、区间套定理、波尔塞诺-魏尔斯特拉斯定理、柯西准则、有限覆盖定理。	确界存在定理、区间套定理、柯西准则、有界无限数列必有收敛的子列、聚点原理、有限覆盖定理。	不讲。
数列的极限	ε-N定义、无穷小量、唯一性、单调性、双逼定理、四则运算、单调有界数列必有极限、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$、无穷大、无穷小和无穷大的关系。	ε-N定义、收敛数列的性质——唯一性、有界性、保号性、单调性、四则运算、单调有界数列必有极限、$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$。	ε-N定义、数列收敛的条件（必要条件——有界，充分条件——单调有界，（不证）、充分必要条件——柯西准则（不证）。

教材	综合大学	高师院校	工科院校
函数的极限	ε-δ定义、性质和运算（和数列极限对等的）、单侧极限、$x\to\infty$和$f(x)\to\infty$的情形。函数极限和数列极限的关系、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$、$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$、无穷小和无穷大的阶。	ε-δ定义；ε-T定义、单侧极限、函数极限的性质——唯一性、局部有界性、局部保号性、单调性、有理运算、海涅定理、柯西准则、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$、$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$、无穷小和它的阶的比较、广义极限、无穷大和它的阶。	ε-δ定义、单侧极限、不等式中取极限、无穷小和无穷大的定义、无穷小和函数极限的关系、四则运算、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$、$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$、无穷小的比较，等价无穷小。

空间解析几何

陈绍菱

一　概　　述

十七世纪初叶，初等数学基本完成，可以说，常量数学的发展就告结束。随着坐标的引入，解析几何得以建立，这是变量数学时期的开始，它把数学的基本对象——空间形式和数量关系密切地联系起来，对整个数学的发展起了巨大的作用。

解析几何是大专院校数学系最基本的课程，是从初等数学进入高等数学的转折点，起着承前启后的作用，是学习高等数学的重要基础。

学习本课程的目的和要求，除系统掌握解析几何的基本内容外，更重要的是培养同学运用代数方法解决几何问题的能力，在实际生活中运用解析几何方法处理问题的能力。解析几何和分析、代数有密切的联系，它能为分析中抽象性质作直观解释，并为代数中的抽象对象提供具体模型，使几何、分析和代数形成不可分割的有机整体。解析几何在工程技术、物理、化学、生物、经济等其他领域里都有广泛的应用。

本课程以实数代数和向量代数为工具来研究欧几里得三维空间几何。为了配合欧几里得空间度量性质的特点，这里仅

学习笛卡儿直角坐标系，同时要会运用向量和坐标两种方法。

由于中学已学过解析几何中的平面部分，这里只学习空间部分，也就是欧几里得空间解析几何。此外鉴于目前中学所学平面解析几何似不能满足数学专业后继课学习的需要，因此列入“平面解析几何补充”作为附录。至于仿射解析几何和射影解析几何，放在高等几何课里学习。

本课程主要包括四个单元：

（一）向量代数；

（二）空间的一次问题；

（三）特殊曲面和空间曲线；

（四）空间的二次问题。

另外，平面解析几何复习和补充作为附录，它包括一般二次曲线问题的研究、参数方程和极坐标。

在大学里这门课程都安排在第一学年第一学期，讲授的学时数大约70左右。由于自学的条件不同，读者可以适当增加学时数。

自学的读者首先要选择好课本，到目前已出版的解析几何教材有多种，现在介绍下列几种作为课本和参考书。

《空间解析几何学》，朱鼎勋、陈绍菱编，1982年，北京师范大学出版社出版。这本书专讲欧氏解析几何，系统比较完整，内容比较精炼，其中习题是集中编写的，最后附有平面解析几何复习和补充，以补足中学学习的不足。这本书可以作为自学课本。

《空间解析几何》，吴大任编，1981年，人民教育出版社出版。这本书对欧几里得、仿射、射影三种解析几何都给予介绍，而且讲解方法和代数密切配合，可以参考其中欧氏部分。

《大学自学丛书空间解析几何》，朱鼎勋编，1981年，上海科技出版社出版。

《解析几何》，孙泽瀛编，1958年，高等教育出版社出版。这本书平面部分、空间部分俱全，仅讲授欧几里得解析几何，特点是几何形象观念比较强。

选定课本后，就可以根据前述内容和教材安排，制定比较详细的学习计划，包括划分单元、按单元教材的安排和自学时间的分配。建议自学者参照下表安排自学。

空间解析几何自学时间安排表

单元	内容	学时
一	一般二次曲线方程的研究 《空间解析几何学》附录	24
	参数方程 《空间解析几何学》附录	12
	极坐标 《空间解析几何学》附录	12
二	向量代数《空间解析几何学》第一章 《大学自学丛书空间解析几何》第一章和第二章	30
三	平面 《空间解析几何学》第二章 《大学自学丛书空间解析几何》第三章	24
	空间直线 《空间解析几何学》第三章 《大学自学丛书空间解析几何》第四章	24
四	特殊曲面和空间曲线 《空间解析几何学》第四章 《大学自学丛书空间解析几何》第五章和第六章	30
五	二次曲面 《空间解析几何学》第五章 《大学自学丛书空间解析几何》第七章	30
	一般二次曲面方程的研究 《空间解析几何学》第六章 《大学自学丛书空间解析几何》第八章	42

要学好这门课，还要注意下列几点：第一，在自学每节后要写小结，并作一定数目的习题（由易到难）；在自学每章后，要写本章总结，并作一定数目的综合习题，习题最好选作《空间解析几何》和《空间解析几何学》这两本书相应章节的习题。

第二，在学完全书后进行总复习，最后作自我测验题。

第三，如时间不够，第五单元中第二部分可略去。

二　平面解析几何复习和补充

本单元的内容，就是上表所列第一单元的三部分。

（一）学习二次曲线的代数理论这部分的时候，要认真领会和掌握下列各点：

1．一般二次曲线方程的第一种化简法，它包括：先求旋转角，利用坐标系的旋转化去交叉项，注意旋转角三角函数值符号的取法；再用坐标系的平移化成标准方程。用这个方法不但能定曲线的形状，而且能准确地决定曲线在旧系下的位置。

2．中心的确定，它包括：中心的求法；利用中心把一般二次曲线方程予以分类。

3．一般二次曲线方程的第二种化简法，它包括：I_1、I_2和I_3是移轴和转轴下的不变量叫基本不变量；K_1是转轴下的不变量，且当适合某些特定条件时它也是移轴下的不变量，叫条件不变量；I_1、I_2、I_3和K_1组成不变量完全系统，用它很容易判定一般二次曲线方程所表曲线的形状，但不能确定它的位置；用不变量能写出三类归范方程，而且用这种方程可以具体地算出和曲线有关的一些几何量。注意二次曲

线的归范方程和利用中心所分的三类是相对应的。

学习这一单元，要求读者能够：利用坐标变换简化一般二次曲线的方程；不变量本身证明不作要求，但是要会用完全系统来判定曲线的种类；利用归范方程、不变量确定曲线一些几何量的大小。

（二）学习参数方程这部分的时候，要求读者领会和掌握下列各点：

1．选定参数，建立直角坐标系下曲线的参数方程，参数有时有几何意义。

2．直线和二次曲线参数方程的建立。

3．利用参数解决一些复杂的轨迹问题。

4．曲线参数方程所表曲线的描绘。

（三）学习极坐标这部分的时候，应该掌握下列各点：

1．极坐标系建立的要素以及它和直角坐标系的异同。

2．曲线极坐标方程的讨论以及曲线的描绘。

3．利用极坐标建立曲线的方程。

三 向量代数

读者过去都学过自然数系、有理数系、实数系和复数系等，在它们的运算中有一个公共性质，就是加法都适合交换律、结合律，乘法都适合交换律、结合律和分配律。并且一般遇到的许多计算问题，不论在理论上或实际上，大都在实数范围里进行。在平面解析几何里用坐标表示平面上的点，不论直角坐标或者极坐标，都是用一对有序实数来表示。有了坐标系之后，曲线就可以建立方程，于是就可以展开图形几何性质的研究，这就是平面解析几何的中心思想。特别值

得注意的是，它所用的方法是坐标法，它是在实数范围里进行的。

但是我们常遇到的一些量，不但要用数值，而且还要用方向一起来刻画，这种量就是向量。在这里我们引进向量代数并且用它作为工具，展开对图形性质的研究，这就是向量法，而且用向量法和用坐标法分别所得的结果可以互相转化。这也就是近代常提到的向量几何的部分内容。

学习本单元要注意到向量代数和实数代数的异同，以及向量代数运算的几何作用。

本单元又可以细分成下列五点：

（一）向量的线性运算（《空间解析几何学》第一章，第1-3节）：包括三点内容。

1． 向量的加法；

2． 向量的减法；

3． 数量和向量的乘法。

应当注意的是：各种运算律是否成立？运算结果怎样用几何图形来表示？

（二）空间直角坐标系的建立以及向量的坐标表示（《空间解析几何学》第一章第4-6节）：包括四点内容。

1． 坐标系建立的要素；

2． 向量的分解和代数表示；

3． 直角坐标系下两个基本公式——距离公式和分点公式；

4． 向量的方向余弦和方向数。

应当注意的是：向量公式和坐标公式的互化以及用向量表示的一些公式不论在平面或在空间都一样，而用坐标表示

却不尽相同。

（三）两个向量的第一种乘法——数量积（《空间解析几何学》第一章第7节）：包括三点内容。

1． 数量积的定义；

2． 运算律；

3． 向量和坐标两种表示。

应当注意的是：数量积和两向量长度间的关系；数量积和两向量角度以及垂直间的关系。

（四）两个向量的第二种乘法——向量积（《空间解析几何学》第一章第8节）：包括三点内容。

1． 向量积的定义；

2． 运算律；

3． 向量和坐标两种表示法。

应当注意的是：向量积和两向量长度间的关系，向量积和平行四边形、三角形面积的关系，向量积和两向量共线（平行）的关系。

（五）三个向量的乘法——混合积（《空间解析几何学》第一章第9节）：包括三点内容。

1． 混合积的定义；

2． 运算律；

3． 向量和坐标两种表示法。

应当注意的是：混合积和平行六面体、四面体体积的关系，混合积和三向量共面的关系。

四 空间的一次问题

这是平面解析几何中一次问题——直线在空间的推广，

学习本单元要注意四个方面：

第一，比较平面一次问题和空间一次问题的异同；

第二，要掌握一次形象方程的两种形式——坐标式和向量式以及它们之间的互化；

第三，要注意坐标方程中哪些是常数，哪些是变数；向量方程中哪些是常向量，哪些是变向量；

第四，要掌握用一次形象的方程来解决有关一次形象的几何问题。

空间一次问题和平面一次问题不同，它所表示的图形有两种：一个是平面，另一个是空间直线，现在分论如后：

（一）平面：这部分内容可细分成四点。

1. 平面方程的各种形式：首先利用平面的一个几何特征——过定点以及跟定平面垂直的向量（叫法向量）建立点法式。由此可以推出一般式、三点式、截距式方程。

2. 两平面间的关系：首先推求两平面位置关系的判定；其次再推求两平面的一个度量性质——交角的计算公式；

3. 平面方程的法线式：利用平面的法线向量（和法向量不同）和原点到平面的距离两个要素建立平面的方程。

4. 点和平面的相关位置：首先推求点和平面位置的判定的充要条件，其次再推求点到平面的有向距离（离差）和距离的计算公式。

（二）空间直线：这部分内容可细分成四点。

1. 直线方程的各种形式的方程：首先利用直线的一个几何特征——定点和定向向量（叫方向向量）来建立参数式方程（也叫点向式方程），然后推出对称式、两点式方程，又

从另一角度推出直线的一般式方程。

2．直线和平面间的关系：首先推求直线和平面位置关系的判定，其次推求直线和平面的一个度量性质——夹角的计算公式。

3．两直线间的关系：首先推求两直线间位置关系的判定，其次推求两直线间的一个度量性质——最短距离的计算公式（参考吴大任编《空间解析几何》第四章第三节）。

4．平面束：仿照平面解析几何中直线束的问题进行讨论。

五 特殊曲面和空间曲线

这是平面解析几何中特殊高次平面曲线部分在空间相应的内容。

在平面解析几何里，曲线方程的建立有两种方法：一种是直译几何条件法，另一种就是参数表示法。但是曲线总是看作由点的运动产生的。而空间曲面方程的建立也有两种方法，一种是直译几何条件法，曲面作为由点产生。另一种是曲线产生法。本单元就是利用这两种方法建立若干类特殊曲面的方程。

至于空间曲线可以看作是两个曲面的交线，于是它的方程可由两曲面方程联立表示，要注意答案不是唯一的。另外曲线方程也可由几何性质直接建立。

学习本单元应该注意：利用特殊曲面的几何特征建立方程的时候，要看运用哪种方法方便，有时两种方法都属可能，例如球面方程的建立。同时还要掌握从特殊曲面方程的

代数特征能够认出它表示哪类特殊曲面。

这部分内容又可细分成五点。

（一）曲面、空间曲线和方程间的关系：类似于平面解析几何中曲线和方程的关系，在选妥坐标系后，利用曲面的几何特征建立三元方程$F(x,y,z)=0$，叫做曲面的方程。反过来，三元方程在几何上表示一个曲面，它叫这个方程的曲面。

对空间曲线可以建立方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

这可作和曲面类似的讨论。

（二）球面和空间圆：平面解析几何中的圆在空间的推广就是球面，由它的几何特征用直译条件法就得到它的方程，要注意方程的特征。然后推求一般三元二次方程表球面的充要条件。

（三）一类直纹曲面——柱面：把立体几何里的直圆柱面推广就得到这里的一般柱面。首先要注意它们的几何特征，然后利用曲线产生曲面的方法来建立它的方程。

1. 以$f(x,y)=0$，$z=0$作为准曲线、z轴方向作为母线方向的柱面方程是$f(x,y)=0$。

2. 凡三元方程缺一个变量，必表示以这一变量所对应的坐标轴的方向作为母线方向的柱面。

3. 注意柱面方程不见得缺一个变量。

4. 注意三种二次柱面的标准方程和三种二次曲线的标准方程完全一样。

5． 空间曲线的射影柱面的概念、求法以及它的作用。

（四）一类直纹曲面——锥面：把立体几何中直圆锥面推广就得一般锥面。建立锥面方程的方法和建立柱面方程的方法非常类似。

1． 以原点〔或以(a, b, c)〕点作为顶点的锥面方程必是关于x，y，z（或$x-a$，$y-b$，$z-c$）的齐次方程。

2． 关于x, y, z（或$x-a$，$y-b$，$z-c$）的齐次方程必表以原点〔或以（a，b，c）〕点为顶点的锥面方程。

（五）旋转曲面：立体几何中的直圆柱面、直圆锥面和球面都是最简单的旋转曲面，现在推广到一般情况。首先要注意这类曲面的几何特征，然后利用曲线产生曲面的方法来建立它们的方程。

1． 以$f(y,z)=0$，$x=0$作为母曲线、y轴作为旋转轴所产生的旋转曲面方程是

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0。$$

关于正负号的选取，现在举例说明：

半圆$z=-\sqrt{1-x^2}$、$y=0$以x轴作为旋转轴产生两个曲面块：

$\sqrt{y^2+z^2}=-\sqrt{1-x^2}$和$\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{1-x^2}$，

前者无意义，后者是球面

$$x^2+y^2+z^2=1。$$

因此，$\sqrt{y^2+z^2}$之前应取负号，从而可以看出正负号的作用。

2． 凡形如f（y，$\pm\sqrt{x^2+z^2}$）$=0$的曲面必定表以$f(y, z)=0$、$x=0$作为母曲线、y轴作为旋转轴的旋转曲面或以$f(y, x)=0$、$z=0$作为母曲线、y轴作为旋

转轴的旋转曲面。依同理可分别得$g(z, \pm\sqrt{x^2+y^2})=0$和$h(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$两种情况。

3． 五类二次旋转曲面的标准方程。

4． 曲面和空间曲线参数方程：参数的个数和变化范围；坐标形式和向量形式的互化。

六 空间二次问题

这是和平面解析几何中二次问题的相应内容，学习本单元要注意下列三个方面：

第一，比较平面二次问题和空间二次问题的异同；

第二，已知三元二次方程要能判断属于十七种二次曲面的哪一种，并能作出曲面的草图；

第三，要能够从二次曲面标准方程来研究它们的几何性质。

本单元共分两大部分，一部分是标准方程，另一部分是一般方程。现在分论如后：

（一）二次曲面的标准方程：学习这一部分内容可细分成五点。

1． 曲面方程的讨论：这和平面解析几何中对曲线方程的讨论一样，可以帮助我们对曲面形状有所认识。

2． 利用曲线产生曲面的方法建立椭圆面和两种双曲面、两种抛物面的标准方程；记牢它们方程的特点，会作它们的草图。

3． 研究两类二次曲面——单叶双曲面和双曲抛物面的直纹性质。

4．空间坐标变换：空间坐标变换也有两种。坐标系的平移和平面部分基本相同，而坐标系的旋转却不完全相同，注意旋转公式中只有六个独立系数，而且应该知道它们所应适合的关系。

5．应牢记十七种二次曲面的标准方程。

（二）二次曲面的一般方程：这是和平面解析几何中一般二次曲线方程相类似的内容，共分三点：

1．一般二次曲面方程的若干几何性质：利用求直线和二次曲面的交点所得的二次方程，得出割线、切线、离线、渐近线以及母线的判定法；径平面、中心和顶点的求法；用中心给出一般二次曲面方程的一种分类法。

2．一般二次曲面方程的第一种化简法：首先确定三个主方向的方向余弦而建立新坐标系；经过坐标轴的旋转可同时消去三个交叉项；再经过坐标系的平移就可化成标准方程。这个方法不但能知道图形的形状，而且还知道图形关于旧系的位置。

应注意特征根的重复度以及主方向、方向余弦的选取方法。

3．一般二次曲面方程的第二种化简法：I_1、I_2、I_3和I_4是移轴和转轴下的不变量，叫基本不变量。K_1、K_2是转轴下的不变量，叫条件不变量。I_1、I_2、I_3、I_4和K_1、K_2组成不变量完全系统，用来可以判定图形的形状，但不能判定它的位置。用不变量写出五类归范方程和用中心分类表里的五种相对应。

在这里，对于不变量本身的证明，不作要求，但会用来判定十七种中的哪一种以及用归范方程去推求一般二次方程所

表曲面的一些几何量的大小。

七 自我测试题

1. 下列方程在平面上和在空间里各代表什么图形？

（1）$x^2+y^2=a^2(a>0)$；（2）$\rho=\theta$；

（3）$\begin{cases}x=t,\\ y=t^2\end{cases}(-\infty<t<\infty)$；

（4）$\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=a^2\end{cases}\quad(a>0)$；

（5）$\vec{P}\cdot\vec{n}^\circ=p$（$\vec{n}^\circ$ 单位常向量，$p>0$）；

（6）$\vec{P}=\vec{P}_0+\vec{S}t$

（$\vec{P}_0$定向量，$\vec{S}$常向量，$-\infty<t<+\infty$）；

（7）$a^2x^2+b^2y^2=2z$（$a、b\neq 0$）。

2.（1）已知两直线

$\vec{P}=\vec{P}_0+\vec{S}_1t,\ \vec{P}=\vec{P}_0+\vec{S}_2t\ (\vec{S}_1\not\parallel\vec{S}_2)$，

它们是不是共面？如果共面，求所在平面的方程。

（2）又知两直线

$$\vec{P}=\vec{P}_0+\vec{S}t,\quad \vec{P}=\vec{P}_1+\vec{S}t,$$

它们是不是共面？如果共面，求所在平面的方程。

（3）如果上面两个平面都存在且混合积

$$(\vec{S}_1,\ \vec{S}_2,\ \vec{S})\neq 0,$$

求它们交线的参数方程。

3. 已知圆(c)：$x^2+y^2-ax=0$，$z=0(a>0)$，

（1）求以(c)作为准曲线、z轴作为母线方向的柱面方程；

（2）求以(c)作为准曲线、以(α,β,γ)点作为顶点的

锥面方程；

（3）求以（c）作为母曲线、x轴作为旋转轴的旋转曲面方程；

4.（1）求直线 $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

$(l^2+m^2+n^2=1)$

和椭圆面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$相切的充要条件；

（2）再从椭圆面外一动点作三条两两垂直的切线，求这动点的轨迹，并说明它的形状。

5．已知二次曲面

$$yz+zx+xy=a^2 \qquad (a>0),$$

（1）问它表示哪种二次曲面？

（2）求它的主轴长。

数学分析

薛宗慈　邝荣雨

一　概　述

数学分析这门学科产生于十七世纪。当时由于航海事业的发展需要研究天文学和力学中的问题，而旧的数学方法已无能为力，于是需要寻求新的数学方法。由于生产实践的需要，必须研究自然界各种变量之间的相互依赖关系，这样就在数学中产生了函数的概念，并且产生了专门研究函数的数学分支叫做数学分析，或者叫做无穷小分析，这是因为用来研究它的重要工具是无穷小法，按现代形式说也就是极限方法。有时候也把数学分析叫做微积分学，这是因为微分学和积分学是数学分析中最主要的内容。扼要地说：数学分析是用极限方法研究函数的学科。

数学分析是学习近代物理学、工程技术和一些数学专业课程如常微分方程、实变函数、复变函数、偏微分方程等课程的重要基础。掌握这门课程的基本理论和基本方法，对于以后的学习、研究和应用都有决定性作用。

数学分析的内容大致可以分成四部分：

（一）极限论：其中包括函数、极限、无穷小、无穷大、连续等基本概念。

（二）一元函数的微积分：其中包括导数、微分、中值定理、泰勒①公式、不定积分、定积分。

（三）多元函数的微积分：其中包括多元函数的极限、偏导数、方向导数、全微分、隐函数存在定理、多重积分、曲线积分、曲面积分、含参量的积分、场论。

（四）级数论：它的内容有数项级数、函数项级数、幂级数、三角级数、广义积分、含参数的广义积分、欧勒函数。

自学首先要选择课本，现在流行的数学分析教本很多，最常见的有：

《数学分析》，复旦大学数学系编，1979年，人民教育出版社出版。

《数学分析》，华东师范大学数学系编，1980年，人民教育出版社出版。

《数学分析》，武汉大学数学系编，人民教育出版社出版。

《数学分析》，吉林大学数学系编，1978年，人民教育出版社出版。

《微积分和数学分析引论》，R·柯朗、F·约翰著，1979年，科学出版社出版。

《大学基础数学自学丛书》有关微积分部分（三册），1980年，上海科技出版社出版。

《数学分析》，G·克莱鲍尔著，1981年，上海科学技术出版社出版。

---

① 泰勒（1685—1731）英国数学家，一译台劳，泰勒公式许多课本译作："台劳公式"。

《数学分析原理》，格·马·菲赫金哥尔茨著，1959年，人民教育出版社出版。

《微积分学教程》，格·马·菲赫金哥尔茨著，1954年，人民教育出版社出版。

以上所列华东师范大学、武汉大学、吉林大学和复旦大学编的《数学分析》，都是上下两册，深浅程度相差不多，如果就局部而论，编写得又往往各有所长，不妨多方面参考。《数学分析原理》和G·克莱鲍尔著的《数学分析》两书讲的理论较高一些，可作进一步学习的参考。《大学基础数学自学丛书》的理论要求比上述各书略低，由于它是专供自学的读物，所以对于概念的讲解既能由浅入深、通俗易懂，又有一定的严密性，书里还选编了比较多的例题和习题，也是很有价值的参考书。

建议读者用复旦大学编的《数学分析》作为主要自学材料，这书的内容选得比较恰当，讲的深度和广度比较适中，概念的解说、理论的分析是清晰的，习题的选择，无论在数量和质量上，都达到一定的广度和深度。读者可以根据自己情况安排学习。

大学的数学分析都开设在一二年级的四个学期，每周讲授4学时，另有习题课2学时。大约讲授共需260学时，习题课共约100学时。自学由于条件不同，读者可以适当地增加时间。现在依照复旦大学所编《数学分析》，给读者拟订一个自学计划，以供参考。

下页表里所列学习次序和原书的章次有些不同，为的是把多元函数和一元函数分开，而把实数的基本定理和闭区间上连续函数性质放在定积分之前。这样安排无非是分散难

点，使读者容易掌握。

数学分析自学时间安排表

顺序	章次	内容	学时
1	一	变量和函数	24
2	二	极限和连续	72
3	五	导数和微分	24
4	六	微分学的基本定理和它的应用	42
5	七	不定积分	36
6	三	关于实数的基本定理和闭区间上连续函数性质的证明	42
7	八	定积分	42
8	九	定积分应用和近似计算	24
9	四	多元函数的极限和连续	24
10	十	偏导数和全微分	54
11	十一	极值和条件极值	24
12	十二	隐函数存在定理、函数相关	24
13	十三	含参变量的积分	18
14	十四	多重积分	24
15	十五	积分的计算和应用	84
16	十六	各种积分间的联系和场论初步	42
17	十七	数项级数	42
18	十八	广义积分	24
19	十九	函数项级数、幂级数	48
20	二十	含参变量的广义积分	30
21	二十一	傅立叶①级数和傅立叶变换	36

①傅立叶（1786—1830）法国数学家和物理学家，一译富里埃，许多课本译作“富里埃级数”。

二　函数和极限

这里包括第一、第二和第三章的内容。

（一）第一章关于变量和函数：其中函数概念是重要概念之一，在这里要注意：所谓函数f是指确定的对应规律，$f(x)$是对应于自变量x的函数值，符号$y=f(x)$既表示y是x的函数，又表示y是对应于x的数，也就是函数在x点的值。所谓给定一个函数，就是给定规律f、f的定义域以及f的值域，三者都是函数的组成部分。对应规律f并不一定只用一个解析式给出，其他如反函数、复合函数、连续函数等概念也必须理解清楚。初等函数和它的图象是基本知识，运用绝对值不等式是必须熟练的技能。

第一章习题可以选作：第11页的1，第12页的2、3、5、6、8、9，第13页的11、12，第14页的14、15、16、18，第15页的19、20、21、22、23、24，第21页的1（1）（3）（5）、3、4、6、7，以及第28页的2、3、4、7、10。

（二）第二章关于函数和连续：主要掌握数列极限的定义、性质和运算。ε-N定义是本章最重要的概念，按定义给定了$\varepsilon>0$，利用不等式寻找$N>0$的技巧也要有一定训练。要能用ε-N定义证明数列极限的性质。这个定义有判别数列收敛的作用，实际上也有计算的功能；懂得了这个概念以后，就容易接受函数极限的概念和数学分析中很多概念。

无穷小是收敛于零的数列，而无穷大是一种特殊的发散数列，所以要这样特别提出来是因为它们在分析中有特殊地位。此外要求读者弄清楚无穷小、有界量、无界量和无穷大之

间的关系。

关于数列极限的运算，不要认为这些结论是显然的，注意这些结论必须在一定前提下才能使用。要熟记极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

判断数列极限存在问题也是非常重要的，如单调有界数列极限存在这个定理在这里暂不证明。

函数极限的理论几乎和数列极限的理论完全平行，但比较复杂。首先对于函数在一点 $x=x_0$的极限，提出$\varepsilon-\delta$定义。这个定义可以说是全书理论的核心。虽然可以借 $\varepsilon-N$ 定义推想，但是毕竟要难些。其他象函数的单侧极限、在无限远处的极限以及函数值趋于无穷大的情形，都可以照数列极限来推想。求函数的极限需要较高的技巧，所讲两个重要函数的极限的证法就可见一斑。关于这类问题可参考菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》。

极限理论给函数的连续概念打下了基础，而连续函数是数学分析的主要研究对象。因此在第 3 节中把初等函数的连续性逐个地讨论了一遍。连续函数的性质是本课程中非常重要的部分。它的理论根据必须追溯到实数的连续性；这要涉及专门的实数理论。本书为了简便，取确界原理（有上界的数集必有上确界，有下界的数集必有下确界）作为根据，推得几个工具性的定理：如单调有界数列必有极限、区间套定理、致密性定理和有限覆盖定理，其中后三个定理是互相等价的。我们可以用其中的某一个证明完备性定理以及在闭区间连续函数性质的每个定理。读者可以分别用上面三个定理证明有界性定理，从中体会这三个定理的作用和区别。总

之，第三章是本书的理论基础，是分析方法的基本知识，读者必须给予充分的重视。在极限和连续概念之后，重要的概念之一是一致连续，它把函数的连续性从一点的邻域推广到一个区间，这样对进一步讨论函数的性质当然要方便得多，读者在以后的学习中会体会到这个概念的重要性。

第二章习题可以选作：第53页的1到4、7到16、19到21、24；第76页的1（1）（3）（4）（5）、2、3、4（1）（3）（5）（7）（9）（10）（11）（12）、5到10、13到18；第93页的1到15、17；第97页的1、2、3；第113页的1到17；第123页的1到8。

三　导数和微分

（一）第五章关于导数和微分：导数和微分两个概念中导数是主要的。导数是函数改变量和自变量改变量比值的极限。根据导数定义推导导数公式都是用极限运算，因此可以说本章内容是第二章极限理论的应用。

第二章里讲过的两个重要极限在这里发挥了作用，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 是推导各种三角函数导数公式的主力，而推导对数函数和幂函数的导数，却非用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 不可。反三角函数的导数都是反函数导数公式的推论。复合函数导数公式是扩展导数公式的有力工具，然而用它作运算容易出错。因此，读者必须多加练习，求得熟练准确地运用复合函数的导数公式。

导数是函数在一点的邻域上的性质；虽然这样，但是它并不妨碍利用导数来研究函数的性质。在本章中还要从概念

上理解可导、不可导和连续之间的关系。

高阶导数和高阶微分是为以后的理论作准备的，有些初等函数的高阶导数计算虽然复杂，但是还得要熟习那些公式。

第五章所有习题都可以作，如嫌多，自己可把同类型的题目减少一些。

（二）第六章关于微分学的基本定理和它们的应用：导数只能分析函数在一点邻域上的某些性质，而在这章里却要在整个区间上研究函数的变化。因而怎样用导数来研究函数，必须能用导数的局部性质来分析函数的整体性质，才有可能说导数是在整体区间上研究函数性质的有效工具；而微分中值定理恰恰起着这个作用，它是用导数研究函数的桥梁。以后我们往往用它把函数整体变化情况的研究归结为局部的导数问题。这一部分在自学中要特别注意费尔马定理、拉格朗日定理和柯西定理之间的关系，以及证明过程中定理条件的运用，派生的那些推论都很重要。

泰勒公式实际上是微分中值定理的推广，它是用多项式逼近函数的有力工具，有了它就可以用多项式近似地代替许多不易处理的函数，必须牢牢掌握它。泰勒公式的余项是检验多项式的可靠程度的工具，其中拉格朗日型余项可以解决大部分问题。

函数的升降、凸性和极值各节，是前两章概念理论的应用，能使我们从整体上、几何上认识函数。有关函数的作图以及最大（小）值问题是实用导数的起点，必须通过大量练习，才会学得解决问题的能力。

洛比达法则对于求极限特别有用，但必须注意洛比达法

则只解决$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$待定型的极限。

第六章习题可以选作：第202页的1到13；第216页的1到4、6、7到12；第238页的1、2、3、4（1）（4）（5）（7）、5（1）（3）（4）、6、7（1）（2）、8、9、10、12、16、18、21、23（3）（4）、24、25、26、27、31（1）（2）（4）（6）（10）；第250页的2（1）（3）（4）、3；第258页的1、2；第262页的1、3。

四 积 分

（一）第七章关于不定积分：包括不定积分的概念、运算法则、计算方法，重点是不定积分计算。在这方面要精通三种方法："凑"微分法，换元积分法，分部积分法。计算不定积分，如果希望作到接近于得心应手，大致知道哪类题目应用哪种解法，必须经过大量的练习，才能掌握一点分寸。

第七章习题都要作，读者还可以从吉米多维奇所编的《数学分析习题集》一书上选作一部分。《数学分析习题集题解》由费定晖、周学圣编、演，1980年，山东科学技术出版社出版共六册。

（二）第八章关于定积分：学习这一章，应该吃透定积分的概念、理论，并且能熟练地进行计算。要注意以下这些问题：

1． 定积分概念是怎样从实际问题中抽象出来的；能用ε-δ语言叙述它的定义。

2．定积分的基本性质，其中重要的是积分第一中值定理。

3．定积分基本定理（书里的定理1）

如果$f(x)$在$[a, b]$连续，那么函数$G(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a, b]$可导，且$G'(x)=f(x)$。

在整个微积分学中处于重要的地位。它说明连续函数的原函数一定存在，也揭示了导数和积分之间的联系，或者说揭示了定积分和不定积分的内在联系。这就使我们能够依靠原函数来计算定积分。那就是有名的牛顿-莱布尼茨公式，也就是书里的基本公式：

设$f(x)$在$[a, b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$任意一个原函数，即$F'(x)=f(x)$，那么，

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

计算定积分$\int_a^b f(x)dx$，从定义出发，那是一个形式复杂的和式的极限，现在的基本公式说明这极限就是$f(x)$的一个原函数$F(x)$在$x=a$和$x=b$的值的差$F(b)-F(a)$，这样就大大简化了定积分的计算。

4．熟练掌握定积分计算的两个法则：分部积分法和换元法。

原书第5节《定积分存在条件的进一步讨论》，虽是选学内容，但是作为数学专业的读者还是应该掌握的。本章第1节关于连续函数的可积性，实际是第3节的特别情形，但是比较容易懂些，可以作为定积分理论的最低要求来读懂它。第3节讲大和小和以及它们的性质，都是为了讨论定积

分存在的第一充要条件，这条件是证明一些可积函数类的根据，也是本节的重点。用这定理就可以证明连续函数、只有有限个第一类不连续点的函数、单调有界函数都是可积的。对于这些定理的证明和结论都必须掌握。

（三）第九章关于定积分的应用和近似计算：学习这一章不仅要学习一些公式，而且重要的是怎样用定积分解决实际问题。不论是几何应用或物理应用，所求的都是某个非均匀变化的整体量。其中多半是采用微元法，关于这方面请参阅《大学基础数学自学丛书》中的《一元函数积分学》第四章定积分的应用。现在用一个例题说说这种方法。

假设物体作变速直线运动，速度是$v(t)$，那么，物体在时间间隔$[t_1, t_2]$内所走过的路程是：

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt。$$

第一步求整体量的微元：假定$[t, t+dt]$是区间$[t_1, t_2]$的任意一个子区间。这子区间的局部路程是ΔS，ΔS的主要部分$ds(\approx\Delta s)$是微分式

$$ds=v(t)\cdot dt。$$

第二步求整体量：由所得微分式取定积分：

$$S=\int_{(t_1)}^{(t_2)} ds=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

就是所求的路程。

这方法反映了无限细分和无限求和这两个步骤，当然第一步中应该证明$v(t)dt$确实是局部量ΔS的主要部分。但在实际问题中只要仔细分析，能在局部范围里抓住主要因素，列出的微分式多半是正确的。读者应当会用微元法推导本书

中物理和几何应用的一切公式。

第八章和第九章的习题可以选作：第307页的1到4、6到9；第321页的1到11、12（2）（4）、13、14；第335页的1、2、3、5；第340页的1（1）（2）（3）（5）、（7）、2；第346页的1（2）（4）（6）、2；第349页的1（1）（2）、2（2）（4）（5）、4、5；第353页的1（1）（4）（5）；第356页的1、2、3；第363页的2、5、6、8；第369页的2、3。

五 级数理论

（一）第十七章关于数项级数：这一章的主要内容是关于级数收敛的判别法。尤其是正项数项级数的基本定理。比较判别法、柯西判别法、达朗贝尔判别法、柯西积分判别法是主要的。第1节中的预备知识是难点，上下极限是讲极限的一种方法，是和数列紧密联系着的。级数的和实际是数列的极限，要清楚地理解这里边的关系。绝对收敛的任意项级数一定收敛的定理，使我们能用正项级数的收敛性讨论任意项级数的收敛问题。交错级数的莱布尼茨定理是很有效的判别法。关于级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$的阿贝尔判别法和狄利克雷判别法，它们的条件比较容易验证；对于解决级数的收敛问题还是有效的。关于绝对收敛和条件收敛要从性质上认识它们的不同。比如绝对收敛级数的各项可以重新排列，而条件收敛级数却不是这样，它总可以适当地交换各项的次序使新级数收敛于任何预先给定的S（包括∞的情形），也可以使它以任何方式发散。无穷乘积这节可以选读。

本章习题可以选作：第226页的1到6；第233页的1到3；第240页的1到6（1）（2）、7、8；第250页的1到3（1）（2）（3）、4到7；第258页的1、2。

（二）第十八章关于广义积分：这里包括无穷限的积分和无界函数的积分。本章讨论了它们的收敛定义、简单性质和一些收敛判别法。例如柯西收敛原理、绝对收敛的比较判别法（有几种形式）和柯西判别法。关于一般的被积函数的广义积分还有阿贝尔判别法和狄利克雷判别法，它们是建立在积分学第二中值定理之上的。利用这两个判别法，可以判别一些广义积分的条件收敛性。关于这部分内容，可以对照数项级数部分内容进行学习。

习题选作：第276页的1（1）（4）、2（1）（2）（4）（5）、3到6、8（1）（3）；第281页的1到4（1）（2）（3）（4）、5、6（1）、7到10。

（三）第十九章关于函数项级数、幂级数：这一章主要内容有函数项级数的概念、一致收敛的定义、一致收敛级数的性质和它的判别法、幂级数的收敛半径、幂级数的性质以及函数的幂级数展开。本章的学习要点有：

1．级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$和函数列$\{S_n(x)\}$在$[a,\ b]$上收敛和一致收敛。“一致性”是数学分析的重要概念。把连续改进为一致连续，或者把收敛改进为一致收敛，都是为了把局部性质扩展为全局性质。这点关系必须深入地理解，在使用中体会前后的不同才能逐渐明白。

2．一致收敛级数本质上是把有限个函数的和的解析性质（和的连续性、可微性、可积性）推广到无穷级数的问

题；只有这样级数作为研究函数的工具才能充分发挥作用。

3． 一致收敛的判别法：主要掌握魏尔斯特拉斯判别法，因为，它要求的条件简单、容易使用。

4． 幂级数区别于一般级数的地方在于它是由幂函数构造而成，另外它的收敛域容易确定。它的这些优点，有利于函数的展开，这是它在分析学里的实际价值。这里必须熟练掌握基本初等函数的幂级数的展开式和它们的收敛区间。

习题可以选作：第301页的1（1）（2）（3）（5）、2（1）（2）（3）（4）（6）、3到10（1）（3）、11、12、13；第315页的1（1）（3）（5）（6）、2、4到9、10（2）、11到15（1）（2）（4）。

六 多元函数的微分学

前边五节讲了一元函数微积分的学习方法。多元函数微积分的理论和方法都比一元函数复杂些，然而许多部分的学习方法都可以继承一元函数的情形，所以这里反而可以讲得简略些。

（一）第四章关于多元函数的极限和连续：这一章最重要的概念是多元函数的极限。这里要看清它和一元函数极限的异同，要看清二重极限和二次极限的关系，多元函数的微积分总是从这两方面考虑极限问题的。二重极限的证明和计算要比一元函数极限难一些，没有一般可用的较好的方法（不象一元函数有洛比达法则那样的工具），有时可以借变量替换（如化作极坐标）处理，或者转化为一元函数的极限来研究。本章的理论部分主要是把一元函数的极限理论（如闭区间套原理、有限覆盖原理、致密性原理、柯西收敛原

理）和一元连续函数的重要性质推广到多元函数的情形。我们应该从中学习这些推广的方法。

本章习题最好全做，较难一些的题有：第129页的7，第140页的10。

（二）第十章关于偏导数和全微分：这章里的重要概念是多元函数的偏导数、方向导数和全微分。尤其要搞清多元函数可微、可导（就是偏导数存在）和连续的关系，由此看到多元函数微积分并不是一元函数微积分的简单推广，其中有许多质的飞跃。本章重点是偏导数的计算，而以链式法则作为核心。复合函数、高阶偏导数和隐函数偏导数的计算是计算的难点，也是考验我们是否真正掌握多元函数微分法的一把尺子。多元函数微分学在几何上的应用（切线、法线、切平面、法平面）在场论中是很重要的。关于向量值函数的导数概念，一般地知道就行了。

建议把本章习题全都做做，这样才能熟练偏导数的计算，这对以后学习偏微分方程是至关重要的。第26页（本章起是下册，页码另排）的习题18比较难一些，对我们是一个小小的考验。关于这方面的知识可参考菲赫金哥尔茨著的《微积分学教程》第一卷第二分册第六章第4节微分法。

（三）第十一章关于极值问题：这是多元函数微分学的重要应用。这里起码要掌握极值和条件极值的必要条件以及处理实际问题的方法，进一步的要求是在理论上搞清它们的充分条件，比较困难的是拉格朗日乘数法中使条件极值存在的充分条件，关键是理解哪一个是真正的自变量。

本章习题不多，最好都做做，较难的题有：第61页的4，第69页的1。

（四）第十二章关于隐函数理论：这是多元函数微分学理论中最重要的部分。对于这部分的要求是搞清隐函数存在定理的条件、结论、证明的思路和它的作用。要想锻炼一下自己对隐函数理论的理解程度和证明能力，可以把第78—80页的定理3、4自己证一证。关于函数行列式的知识，以后是很有用的，至于函数相关的内容，一般地知道就行了。

本章习题不多，都可以做做。

七　多元函数的积分学

（一）各种积分：第十四、十五、十六章所讲多元函数积分学的重点是各种积分（重积分、线积分、面积分）的计算，以及它们之间的联系（格林，高斯，斯托克斯公式）。计算重积分要熟悉空间图形并且善于选取积分变量的次序。难点是积分次序的交换和选择合适的变量替换公式。极坐标变量次序的交换较难理解，可借直角坐标情形来理解。三重积分交换变量次序的时候，若从空间图形的平面投影去想可能比较简便些。线、面积分的计算，尤其是第二型曲面积分的计算，难在积分区域从定向变为不定向积分的符号怎样选取，计算的技巧是灵活运用三个公式（格林，高斯，斯托克斯）以及第一、二型积分之间的关系。本书考虑到学生的接受能力和时间限制，这几章里很多重要的基本概念和理论都没有去严格地阐述或论证（如重积分可积准则，变量替换定理，格林、高斯和斯托克斯公式等），因此这方面的要求可以放低一些。

要多做题才能熟练积分计算，每道大题都可挑选一半左右的小题做做。

（二）含参量的积分：第十三、二十章都是含参量的积分，可放在一起学习。第十三章内容不太难，可以多提些问题（如把定理条件中二元函数的连续性减弱为一元函数的连续性是否可以？）反问自己来考察自己对ε-δ方法的理解程度。这两章里重要的基本概念是含参量积分的一致收敛性，要切实掌握好一致收敛性判别法，尤其是魏尔斯特拉斯判别法。这两章最重要的应用是计算积分，尤其是计算广义积分，要理解和掌握计算的一般程序以及每做一步的根据。建议读者把本章和函数项级数对照起来学，进行联想、对比，加深理解。

习题都可以做做，较难的有第98页的4、6（1）、9；第333页的5、6、9。

（三）傅立叶级数：第二十一章的内容是傅立叶级数和傅立叶变换。这里有两个重点，一是会写出可积和绝对可积函数所生成的傅立叶级数，另一是会判断什么样的函数适合收敛定理。至于傅立叶级数的一致收敛性问题、逐项可微和可积问题以及傅立叶变换问题，一般地知道就行了。学习本章要注意搞清傅立叶级数理论和一般的函数项级数理论、幂级数理论的异同点。如时间较紧，可不读带星号的内容。

第362页和第363页的习题11以前的题都应该做，习题12到17可选作一半。习题18到20可能较难一些，不妨试试。

八　自我测试题

1.　（1）用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}=-1$（其中常数$|a|<1$）。

（2）证明函数：$f(x)=|x|\cos x$ 在 $x=0$ 点连续，但导数不存在。

2．（1）叙述函数f：$x\longrightarrow y=f(x)$在x点可微和它的微分的定义，并问：微分和什么量有关？

（2）设 $y=\arccos\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}$，求$\dfrac{dy}{dx}$；

（3）设 $x=y+\sin y$，求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

（4）设$\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\operatorname{arctg}t,\end{cases}$ 求$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}$；

（5）设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求$f'(0)$，$f''(0)$；

（6）写出$f(x)=e^x$在 $x=0$ 点带有拉格朗日型余项的泰勒公式，并证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e。$$

3．求下列不定积分：

（1）$\displaystyle\int\sqrt{x}\ln^2x\,dx$，　　（2）$\displaystyle\int\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$，

（3）$\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$，　　（4）$\displaystyle\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$。

4．设$f(t)$在（a，b）上连续，在（a，b）上一点x_0，它的函数值 $f(x_0)$ 是正的，证明存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0, \delta)$，对于一切$x\in U(x_0, \delta)$，$f(x)$也是正的。

5．设函数$f(x)$在（a，b）内可导，证明函数$f(x)$在（a，b）内单调上升的充要条件是：

$$f'(x)\geqslant 0,\quad x\in(a,\ b)。$$

6．计算以下各题：

（1）$\int_0^1 x\operatorname{arctg} x dx$；

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{a^2\cos^2 x+\sin^2 x}dx$（$a\neq 0$，$|a|\neq 1$）；

（3）求由曲线$y=2x-x^2$和x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周所得的旋转体体积。

7．求以下幂级数的收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{\sqrt{n}}}$。

8．证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n^2}\right)^n$在$|x|<1$连续。

9．证明：

（1）函数 $f(x)=\begin{cases}0, & 当x是有理数,\\ x, & 当x是无理数,\end{cases}$

在$[0,\ 1]$上不可积。

（2）如果$f(x)$在区间I上有有界导函数，那么$f(x)$在I上一致连续。

10．证明：

数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有界的充要条件是：$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的任何子列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$都含有收敛的子列$\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}$。

11．试用有限覆盖定理证明：如果$f(x)$在$[a,\ b]$连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，那么必有$c\in(a,\ b)$，使$f(c)=0$。

高 等 代 数

刘云英

一 概 述

高等代数是大学数学专业的重要基础课之一，是中学代数的继续和提高。它是由多项式论（或方程论）和线性代数两大部分组成的。方程论是十九世纪初形成的代数的中心问题。它围绕着一个未知量的 n 次代数方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的解法的研究形成了一整套理论。这部分内容在中学代数课程里有不少是讨论过的，例如，多项式的运算、多项式的因式分解、二次方程等等。现在看来，方程论只不过是代数学的一个分支罢了。随着数学上的一些重大发现和其他学科对数学的要求，代数学的内容大大丰富起来。比如人们对运算和它的对象的认识发展了，从而提出了研究抽象的“对象”和“运算”的要求，现代的代数转向到研究一些抽象代数体系的结构，使得代数有更广泛的应用。

历史上，线性代数的第一个问题是关于解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

的问题。在中学代数课程里讨论过这个问题的最简单情形，对于任意n个未知量m个方程的情形，就需找出尽可能简单的数值解的方法，这在很多计算和研究中是常用到的。矩阵理论是线性代数中重要而且不可缺少的部分，它在提出和解决线性代数的问题中起着工具的作用。线性代数中很大篇幅是研究抽象的向量空间的结构和它的线性变换、欧氏空间的结构和它的线性变换、二次型等等。这些理论产生的源泉很多都来自数学分析和解析几何，反过来，应用线性代数中讨论的抽象理论，可以简化数学分析和解析几何中一些问题的讨论。线性代数已广泛地应用到其他学科（如在物理、力学、计算技术、编码等）领域中。

在大学里，这门课程的开设时间一般在一年级，有的学校安排在刚入学的第一学期，也有的学校安排在第二学期。前一种安排学起来比较吃力。最好在学完解析几何以后再学这门课。通过这门课的学习可以初步了解基本的、系统的代数知识和抽象的严格的代数方法，以加深对中学代数的理解，并为进一步学习打下基础。这门课的主要内容包括：

（一）基本概念：集合、映射、复数，数域等；

（二）多项式论：数域上一元多项式的因式分解理论、多项式的根；

（三）行列式；

（四）线性方程组理论；

（五）矩阵；

（六）向量空间（线性空间）和它的线性变换；

（七）欧几里得空间和它的线性变换；

（八）二次型和对称矩阵。

自学的读者只要具备中学代数和解析几何的基础就可以学习这门课。这门课在大学里总共的学时数大约是198，其中讲授153学时，习题课45学时。自学的读者可根据自己的情况安排进度，适当增加时间。

自学的读者首先要选择好自学课本，下面这几本教材可选做自学课本和参考书。

为了便于读者安排自学时间，我们按照前面列出的八个单元，提出一个自学时间安排表供大家参考，读者可以根据自己的实际水平安排进度。

高等代数自学时间安排表

单　元	内　　　　容	学　时
一	基本概念	60
二	多项式论	72
三	行列式	48
四	线性方程组	48
五	矩阵	48
六	向量空间和它的线性变换	120
七	欧儿里得空间和它的线性变换	72
八	二次型和对称矩阵	72

《高等代数》，北京大学数学力学系编，1978年，人民教育出版社出版。本书可作为自学课本。

《高等代数》，张禾瑞、郝锅新编，1979年，人民教育

出版社出版。本书也可选作课本。

《线性代数》，谢邦杰编，1978年，人民教育出版社出版。

《高等代数》，王萼芳编，1981年，上海科学技术出版社出版。

《近世代数》，吴品三编，1980年，人民教育出版社出版。

二 基本概念

这个单元包括张禾瑞等所编《高等代数》的第一章或北大数力系所编书中的第六章第1节。所讲内容大部分是为以后的学习作准备的，也是代数的基本概念。主要介绍集合的有关知识、映射概念以及复数的建立等。这些内容不仅在代数学科中经常用到，而且在数学的各个分支中也是要常用的，因此，要学好数学也必须掌握这些基本知识。

集合论是数学的一个分支，内容很丰富。在这课程里只讲它的一点初步知识，比如集合的包含、子集合、集合的交和并等等，这些都很容易理解，远远没有进入集合论的领域。如果自学的读者有兴趣的话，可阅读集合论方面的专著。

关于映射概念，初学者总觉得很难理解。事实上，映射是中学代数课程中函数概念的推广。简单地说，映射是一个集合M到另一个集合N的对应法则，M、N不局限于数集合。学习映射概念的时候，只需和函数概念对照着体会就很容易掌握它。在学习这一单元的时候，要注意满射、单射和1—1映射这几个概念的定义和区别，学会运用定义验证一

个对应法则是映射、满射、单射或1—1映射的基本方法。关于映射的乘法是读者在本学科中遇到的第一个不是“数的运算”，并且这种运算不满足交换律。这一性质和数的加法或数的乘法满足交换律的性质是不同的。映射的乘法在后面的学习中经常要用到；由映射的乘法所定义的有逆映射的映射，今后将占一个特殊地位。

复数的建立回答了$a+bi$究竟是什么意思，也就是说搞清楚了i是什么。“$a+b\cdot i$”中的“+”“·”不是实数的加法和乘法，它们是什么运算？通过这些问题可以初步体会较严格地建立某一数系的方法。

由有理数集、实数集、复数集总结得出的数域这一概念是很重要的代数体系，其中可以进行加、减、乘、除四种运算（零不能作除数）。这是我们认识的第一个代数体系。

自学的读者在学习这一单元的时候，切不可性急。由于刚刚接触抽象的概念，不易理解和掌握它，因此必须反复推敲，通过书上的例题和自己认真做练习来加深理解。真正掌握它还要靠以后使用这些概念时，不放过对它的再认识。

三　多项式论

这个单元包括北大数力系编《高等代数》的第一章或张禾瑞等编《高等代数》的第二章。内容的大部分是中学代数里学过的。但是这里用到的概念都有严格的定义。这部分系统地讨论了数域上一元多项式的整除性理论和因式分解问题，并且论证了数域上一元多项式的“形式定义”和“函数定义”的统一性。这些讨论从理论上完善了中学代数关于多项式的讨论，从而加深对某些问题的理解。

在学习多项式的整除性理论的时候，千万不要把“整除”和“除法”混淆。我们说数域F上多项式$g(x)$能整除$f(x)$，就是说存在$F[x]$的多项式$h(x)$使得

$$f(x)=g(x)h(x)。$$

根据这个定义，零多项式能整除零多项式。但是不许以零多项式去除任何其他多项式。初学者还需要认真体会多项式的整除性质的论证方法，也就是从定义出发经过严格的逻辑推理得出需要的结论来。这是代数学的一个基本原则，是必须注意的。书上论证的一些整除性质也必须牢牢记住，搞清它们的含义和区别，以后经常要用到。带余除法是整除性理论的一个基本定理，也就是中学课本里所说的“长除法”。由它可以推导出求两个多项式的最大公因式的辗转相除法，还可以推出一次因式和多项式的根的关系等。由于用一个非零多项式去除另一多项式的时候所得的商式和余式是唯一确定的，因而，多项式$g(x)$能不能整除多项式$f(x)$都和数域的扩大没有关系。这一事实带给我们很大的方便。求两个多项式的最大公因式的辗转相除法是很容易理解的，必须掌握它。

由于两个多项式的最大公因式不是绝对唯一的，也就是可以相差一个零次多项式，所以要引入符号$(f(x),g(x))$，用它来表示$f(x)$，$g(x)$的首系数是1的最大公因式。这样一来，$(f(x),g(x))$表示的就是$f(x)$，$g(x)$的一个唯一确定的最大公因式。

互素多项式和不可约多项式，在多项式的讨论中都占有重要的地位。要牢记它们的定义和性质，并且要会应用它们的性质论证问题。本来这是两个完全不同的概念，但是初学

者总是容易混淆。学习的时候，一方面要认真钻研一下它们各自的定义，另一方面可以试着归纳一下它们各自的用处。判断两个多项式互素的充分和必要条件是很重要的定理，就是：$F[x]$的两个多项式$f(x)$和$g(x)$互素的充要条件是：在$F[x]$中可以求得多项式$u(x)$和$v(x)$，使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1。$$

读者可以自己总结一下它的作用。

多项式的因式分解定理，肯定了数域上一元多项式分解成不可约多项式乘积的可能性和唯一性，这定理在理论上起着很重要的作用。但是，它没有解决怎样分解的问题。到现在也还没有解决这个问题。

另外，我们必须注意多项式分解成不可约多项式的乘积同数域有关，也就是说同一个多项式在不同数域上分解成不可约多项式的乘积的时候，出现在分解式中的不可约多项式可能不同（这种不同不仅是相差一个零次多项式）。例如，多项式x^4-1，在复数域上分解成

$$(x+i)(x-i)(x-1)(x+1)；$$

在实数域上却分解成

$$(x^2+1)(x-1)\ (x+1)。$$

因而一个多项式是不是可约也和数域有关。例如，x^2+1在实数域上不可约；但是，在复数域上就可约了。

读者必须牢记复数域上的不可约多项式只能是一次的，而实数域上的不可约多项式除一次多项式外，还有含非实共轭复数根的二次多项式。至于要判断其他数域上的多项式是否可约是件很麻烦的事，至今没有一般的方法。只能对一些特殊的多项式采用特殊的方法进行判断，比如对有理数域上

的某些多项式可以用艾森斯坦因判别法。但是，要注意这个判别法的条件只是充分条件而不是必要条件。

讨论实际问题，常常需要求多项式的根，在计算方法课程里可以给出近似解法，这些近似解法在实际应用中完全可以满足要求。在我们这门课里，删去了这方面的讨论，只讨论了根的个数问题、根和系数的关系、一次因式和根的关系等等。这些讨论有利于具体求根的工作，同时可以把多项式的"形式定义"和"函数定义"统一起来。中学课本对于这两种定义，总是不加区分地随意使用，比如在作多项式的加法、乘法等运算的时候，就按"形式定义"处理；在求多项式的值的时候，又按函数定义处理。证明了两种定义的统一性就保证了过去中学课本中的处理的合理性。今后我们也可以随意按哪一种定义来理解多项式。初学者对这个问题需认真思考，不然，很可能认为是很明显的事实，或者认为是不可理解的事实。

在这个单元里提到了"代数基本定理"，我们暂时可以不管它的证明。但是，要看到它的作用。这个定理的名称是有历史原因的。十九世纪中叶以前，代数学的研究中心是四则运算以及解方程问题，因此，"n 次方程在复数域中有 n 个根"被叫做代数基本定理。一百多年后的今天，数学向前发展了，代数早已改变了它的中心，但是为了尊重历史，还是沿用这个名称。

自学的读者在学习这一单元的时候应注意以下两个问题：

第一，本单元的内容大部分是读者熟习的。先入为主的意识会使你的旧知识阻碍你接受新知识，以致漠然对待现在

的严格定义和严格论证，必须谨防这个弊病。希望读者在学习的时候要认真钻研教材，要使原来所学的知识帮助我们加深对概念的理解，搞清论证的实质；切不可使原来所学的知识成为"拌脚石"。

第二，本单元涉及的概念比较多，要注意它们各自的特点和相互间的联系。读者不仅要理解这些概念，而且要会应用。为了达到这一要求读者在学习教材的时候必须仔细分析课本里给出的论证和证明，弄清每一步的根据。遇到看不懂的地方就返回去复习有关概念和推证，不可轻易放过。在做习题的时候也必须做到步步有依据。

四 行 列 式

这个单元包括北大数力系编《高等代数》的第二章或张禾瑞等编《高等代数》的第三章。主要内容是介绍 n 阶行列式的定义、性质和它的计算，以及应用行列式理论给出克莱姆规则。行列式的应用很广泛，在我们这门课里可以看到用它解线性方程组、判断向量组线性相关还是线性无关、求矩阵的秩和求矩阵的逆矩阵等等，通过这些问题的讨论已足够体会行列式这件工具的重要作用。

n 阶行列式的定义和性质是具体分析了二阶、三阶行列式计算的规律后给出的。因此，在学习 n 阶行列式的定义和性质的时候，要结合二阶、三阶行列式来体会，并且要牢记 n 阶行列式的定义和性质，它们是以后讨论问题的出发点。n 阶行列式的计算需要有一定的技巧，这就要靠多练，要善于总结规律，掌握常用的基本技能，比如用逐次降阶的方法然后依行（或依列）展开行列式，或找出递推公式，或用数

学归纳法等等。

利用 n 阶行列式解含 n 个未知量 n 个方程的线性方程组的方法——克莱姆规则，一方面给出了这类方程组的解法，另一方面给出的求解公式在理论上也很重要。

学习这个单元的时候，读者注意锻炼自己的计算技巧，切记在计算 n 阶行列式的时候不要乱套二阶或三阶行列式的展开方法。

五　线性方程组理论

这个单元包括北大数力系编《高等代数》的第三章或张禾瑞等编《高等代数》的第四章。讨论的对象是含有任意个未知量的任意个方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

其中有三个问题：第一，怎样判断一个线性方程组有解？第二，如果一个线性方程组有解，它有多少解？第三，如果一个线性方程组有解，怎样求解？解决这三个问题的途径有二条：用消元法或用线性方程组可解的判别法。

消元法简单明了、容易掌握，是极重要的，读者一定要熟练地掌握它。

有时候，我们希望直接由线性方程组的系数和常数项来判断方程组是否有解。这样，就需要通过线性方程组可解的判别法来解决。这就是线性方程组有解的充分必要条件是它的系数矩阵和增广矩阵有相同的秩。

这个判别法在理论上很重要。读者除去学会使用这个判别法外，还需搞懂它的推导方法。并且在学习判别法的推证的时候注意掌握矩阵的秩的两种定义的等价性；体会这两种定义各自的特点和联系以及为什么要引入两种定义。

在线性方程组的讨论中，齐次线性方程组占有特殊重要的地位。在今后的学习中要注意应用齐次方程组可以解决哪些问题。

齐次线性方程组肯定有解。主要研究怎样判断它有非零解和求齐次线性方程组的基础解系。对于这两个问题要求读者掌握得很熟练。

学习这个单元的时候，读者要初步体会矩阵这件工具的重要作用。特别是矩阵的初等变换要牢牢掌握。这在今后的学习中是经常用到的。

六 矩　阵

这个单元包括北大数力系编《高等代数》的第四章或张禾瑞等编《高等代数》的第五章，主要介绍矩阵的运算和它的一些基本性质。1850年，英国人西尔维斯特提出矩阵概念，1858年，凯莱建立矩阵运算规则以来，对矩阵的认识和作用在许多方面得到了发展和应用，使它成了线性代数的一个重要研究对象。

在学习这一单元的时候，从概念上讲读者不会遇到什么困难。但是要注意引入各种运算时候的条件，不能乱套用。比如两个矩阵A、B相乘的时候，要求A的列数等于B的行数。又如求矩阵A的逆矩阵，要求A是方阵并且$|A|$不等于零等等。要牢记各种运算的规则，和它们满足的运算定律。

切记矩阵乘法不适合交换律。要熟记初等变换和初等矩阵的对应关系。

七　向量空间和它的线性变换

这个单元包括北大数力系编《高等代数》或张禾瑞等编《高等代数》的第六、七两章。这部分内容很多，主要应掌握向量空间和子空间的概念、向量的线性相关性、向量空间的基和维数、向量的坐标和向量空间的同构、线性变换的概念和它的运算、线性变换和矩阵、不变子空间、特征根和特征向量等。

向量空间是读者接触的第一个抽象的代数结构。刻画向量空间的公理条文又比较多，初学者会感到既不好理解又难于记忆。这就希望读者认真地分析一下书里给出的例子，特别是解析几何中学过的“二维空间（平面）”和“三维空间”，还有数域F上n维向量作成的向量空间$F^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_i\in F\}$都是很容易理解而在今后学习中又常要用到的向量空间。向量的线性相关性这部分内容是线性代数重要基本概念集中的地方，学起来会感到困难，主要是概念太多。学习的时候要注意它们之间的区别，同时也要看到它们之间的联系，要吃透书上的例题，读者自已也可以试着举些例子，要有正面例子，也要有反面例子，正反两方面反复对比就不难掌握这些概念了。

这部分内容中的“替换定理”十分重要，也非常有用。读者应该总结一下它的用处。常常有人搞不懂线性相关和线性无关这两个最基本的概念，因而也就不会判断一个向量组是否线性相关。读者不妨这样来理解定义：给出向量组α_1，

$\alpha_2, \cdots, \alpha_n$，如果能由等式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

的成立，推得一组不全是零的数$k_1, k_2, \cdots, k_n$来，那么向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关；如果上面的等式成立，$k_1, k_2, \cdots, k_n$必须全是零，那么向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关。

基、维数、坐标这部分内容很重要，因为各个具体的向量空间，尽管各有自己的属性，但是，它们又都符合向量空间定义的要求，因而必然有些共同性质。把这些共性取出来才能找到一个研究向量空间的统一方法。讲向量空间的基、维数和向量的坐标就是为了给研究向量空间提供统一的工具和方法。这也是代数学处理问题的一般方法。理解这部分内容本身，读者不会感到什么困难，可能作练习题的时候，由于涉及线性相关性那部分的概念比较多，因而会感到不好做。但是，读者可以通过这一部分的练习，巩固前边所学的知识和概念。认真总结一下用了以前哪些概念，对这些概念有哪些进一步的理解，这样总结多了，对学习会有益处的。

学习向量空间的同构可以把数域F上的任意n维向量空间都看作F^n，讨论起来就具体多了。

线性变换是这个单元的重点，首先要搞清线性变换的定义，不但要记住定义中的条件，而且要掌握几个重要线性变换，比如单位变换（恒等变换）、位似变换、平面（或空间）上的旋转等等，这些简易的例子有助于理解关于线性变换的一些讨论。线性变换的运算不难掌握，但是，要弄清线性变换的和仍是线性变换、线性变换的积仍是线性变换、数k和线性变换的纯量积仍是线性变换等事实的证明，从中理解线性变换的运算的实质。

线性变换和矩阵的关系是研究线性变换的重要关键，首先要弄清怎样定义一个线性变换关于给定基下的矩阵，并且反过来会用矩阵来定义一个线性变换，从而在线性变换和矩阵之间建立一一对应关系，于是能把线性变换的讨论转化到矩阵上。由于矩阵比较具体，讨论起来要方便多了。读者要学会用矩阵这个工具来研究线性变换。其次要弄清，给定的一个线性变换，关于不同基的矩阵是不同的，而这些矩阵之间的关系是相似的，从而引出了标准形的问题。初学的读者只需要了解什么叫矩阵的标准形就可以了，至于怎样决定矩阵的标准形就不必深究了。

线性变换（或矩阵）的特征根和特征向量，不仅在代数学里，而且在其他学科（如常微分方程）里，都占着重要的地位。读者一定要掌握线性变换的特征根和特征向量，要掌握矩阵的特征根和特征向量的定义，注意它们之间的联系和区别。会求线性变换和矩阵的特征根和特征向量，虽然计算上没有什么困难，但是不可忽视求法的理论推导。

八　欧几里得空间和它的线性变换

这个单元包括北大数力系编《高等代数》的第九章或张禾瑞编《高等代数》的第八章。内容主要讨论欧几里得空间的结构和它的主要线性变换——正交变换和对称变换。学习前一部分的时候，要抓住“内积”这个概念。内积是什么？实际上它是一种对应规则，给实数域上向量空间V的任意两个向量α，β配置一个实数，记作(α,β)。这是推广了的映射，并且要求它有三种性质：对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；线性性：$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$，正定性：$\alpha\neq0$时$(\alpha,\alpha)>0$。

同时，我们也把两向量α,β对应的实数(α,β)叫做α,β的内积。二者虽然用同一个名称，在使用的时候，是不会混淆的。实数域R上的向量空间V有了内积，就可以变成欧几里得空间。利用内积可以定义V中向量的长度、两个非零向量的夹角。这样，我们所讨论的欧几里得空间和解析几何中的二维或三维空间有了很类似的性质，都是带有度量的向量空间。

在学习有限维欧几里得空间的结构的时候，必须搞清楚怎样用矩阵刻画欧几里得空间里的内积，并且牢记内积关于欧几里得空间某一取定基的矩阵是对称矩阵。特别要注意欧几里得空间中取定的内积关于空间不同基的矩阵是不同的，这些矩阵之间的关系是合同的。这个问题类似于讨论一个固定线性变换关于空间不同基的矩阵是相似的。学习的时候可以前后对照着考虑。如果在欧几里得空间里可以选择正交基或标准正交基，那么，不仅空间中的每个向量可以用它关于这个正交基（或标准正交基）的坐标来代表，而且空间中任意两个向量的内积也可以用两个向量对应的坐标乘积的和给出。这样一来，任意n维欧几里得空间都可以看成R^n了，给我们研究任意n维欧几里得空间提供了方便。因此，决定一个有限维欧几里得空间的正交基是极其重要的。这个问题解决的比较圆满，任意给n维欧几里得空间V一组线性无关的向量，都可以把这组向量正交化，从而得知有限维欧几里得空间一定有正交基，当然也就有标准正交基了。关于这部分内容，读者一定要掌握"正交化方法"，并且搞清楚它的理论推导。

在欧几里得空间中定义了向量的长和两个非零向量的夹

角以后，有许多性质类似于解析几何里讨论向量时候的性质。读者在学习的时候，应认真地对比一下，这样既可以加深对概念的理解，又可以体会到某些概念推广后的威力。数学理论的发展有不少工作是属于推广方面的。

欧几里得空间中主要的线性变换是正交变换和对称变换。自学的时候，要注意抓住它们各自的特点，特别是它们对应的矩阵的特点。正交变换对应的是正交矩阵，对称变换对应的是对称矩阵，这两种矩阵在线性代数中应用最多，读者可以有意识地注意一下它们各自的作用。

这个单元的内容学起来会感觉比前一章容易些，主要是因为欧几里得空间是解析几何中普通空间的推广，许多性质都比较容易理解。但是，也容易受旧知识的束缚。比如两个向量正交是垂直概念的推广，在几何里不能说零向量和任意向量垂直(按两向量的夹角是90°就说这两个向量垂直)，但是，在欧几里得空间里，零向量和任意向量正交。读者可以自己归纳一下，一般欧几里得空间里有哪些概念、性质是几何空间里某些概念、性质的推广？推广后是否有不同的地方？作这种练习对初学者是很有益处的。

九　二次型和对称矩阵

这个单元包括北大数力系编《高等代数》的第五章和第九章第6节，或张禾瑞编《高等代数》的第九章部分内容。读者主要掌握以下内容：

关于二次型和它的矩阵，必须搞清楚每有一个二次型就有一个唯一确定的矩阵和它对应，反过来，每有一个对称矩阵也唯一地决定一个二次型。这种一对一的关系可以把二次

型的研究转化成为矩阵的问题。

非退化线性替换用矩阵表示，可以写成$X=PY$，其中P是可逆矩阵。

这个单元的主要问题是二次型在非退化线性替换下怎样化简，主要定理就是：

数域F上任何二次型在非退化线性替换下，可以化成：

$$C_1x_1^2+C_2x_2^2+\cdots+C_rx_r^2。$$

这个定理也叫做化二次型为标准型的定理。

标准型的唯一性问题仅在复数域和实数域上讨论，这一部分重要的结果是实数域上二次型的惯性定律。

读者学习上述几个问题一定要随时注意二次型和矩阵的对应关系，关于二次型研究的某些结果能“翻译”到矩阵上，反过来也可以做。

关于实数域上的二次型还有两个问题也很重要。第一，实二次型可以经过可逆线性替换$X=UY$、（其中U是正交矩阵）化成

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2。$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是实二次型的矩阵的特征根。这个问题的讨论正是解析几何上二次曲线（或二次曲面）经坐标轴的旋转化到主轴上的推广。用矩阵语言可以这样叙述：对于任意n阶实对称矩阵A，都存在一个n阶正交矩阵U使

$$U'AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}。$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的全部特征根。

第二，关于正定实二次型，读者主要掌握正定二次型的特点和常用的判定条件。

十 自我测试题

1. 设 f 是 A 到 B 的一个映射，g 是 B 到 A 的一个映射。如果 $f\cdot g=i_B$，证明：f 是满射，g 是单射。

2. 设 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a^2 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a^2 & 0\cdots0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots0 & 1+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

证明：（1）$D_n-D_{n-1}=a^2(D_{n-1}-D_{n-2})$；

（2）用数学归纳法计算 D_n。

3. 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$$

有解，那么线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n-b_1x_{n+1}=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n-b_2x_{n+1}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n-b_mx_{n+1}=0 \end{cases} \quad (2)$$

有非零解，

反过来，如果（2）有使 $x_{n+1}\neq0$ 的解，那么（1）也有解。

4. （1）设$f(x)$是复系数多项式，$d(x)=(f(x),\overline{f}(x))$.

证明：实数a是$f(x)$的根$\Leftrightarrow a$是$d(x)$的根.

（2）如果$h(x)\mid f(x)g(x)$，问$h(x)$能否整除$f(x)$?试举例说明。

5. 把矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

写成初等矩阵的积，并求出它的逆矩阵。

6. 设$V=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\middle| a,b\in R\right\}$，

（1）证明：对于矩阵的加法和纯量乘法来说，V作成实数域R上的向量空间；

（2）求向量空间V的基和维数。

7. 设$R^3=\left\{\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\middle| x_1,x_2,x_3\in R\right\}$.

（1）证明：$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$是$R^3$的一个基；

（2）令$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$,$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$,$\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$,求$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$到$\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$的基过渡矩阵；

（3）求R^3中分别在基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$和基$\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$下有相同坐标的向量；

（4）设σ是R^3的一个线性变换，σ关于基$\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix},$$

求σ关于基$\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$的矩阵；

（5）求σ的象空间和核空间。

8. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是数域$F$上$n$维向量空间$V$的一组向量，证明：

$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$作成$V$的一个基的必要充分条件是：

$$V=L(\alpha_1)\oplus L(\alpha_2)\oplus\cdots\oplus L(\alpha_n).$$

9. 设

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

求一正交矩阵U使

$$U'AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix},$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是$A$的全部特征根。

10. 设V是实数域R上的向量空间，R可看作R上向量空间，σ是V到R的一个线性映射，令$W=\mathrm{Ker}\,\sigma$，$W\neq\{0\}$且

$W \neq V$；

证明：(1)V中任一向量α可写成$\xi + k\xi_0$，其中$k \in R$；

(2) $V = W \oplus L(\xi_0)$。

11．设W是n维欧几里得空间V的一个子空间，令σ：$\xi \longrightarrow \xi$在W上的正射影，那么σ是V的一个线性变换，且σ关于V的任一标准正交基的矩阵A具性质：$A^2 = A$；

并证明：$|\sigma(\xi)|^2 + |(I-\sigma)(\xi)|^2 = |\xi|^2 \quad \forall \xi \in V$，其中$I$是单位变换。

常微分方程

马遵路

一 概 述

常微分方程这门学科大体上是和微积分同时产生的。它和天文学、力学、电学、生物学、化学等许多学科有广泛的联系，在数学领域里，和其他一些分支相互渗透、关系密切。在现代，它是大学（综合大学或师范院校）数学专业重要的基础课程之一。

在大学里，一般都把常微分方程这门课安排在二年级（或在第四学期或在第三学期）。因为这时候学生已经基本上学完了数学分析、普通物理的力学和电学部分、线性代数这几门先行课。学习常微分方程，要把它的基本知识、基本理论和基本方法学到手，以期能用它们在其他学科中解决一些最基本的常微分方程问题，也希望能解决数学本身的一些理论问题，为其他学科奠定必要的基础。

常微分方程的内容主要包括：

（一）常微分方程的基本概念和定义；

（二）初等积分法（一阶方程、高阶方程、方程组）；

（三）常微分方程的基本理论（初值问题的解的存在唯一性定理、解的延拓、解对初值或参数的连续依赖性和可微

性定理等）；

（四）线性方程和线性方程组的一般理论；

（五）常微分方程理论的几个分支介绍；

（六）一阶偏微分方程。

前四部分是最基本的知识，要认真掌握，后两部分可以斟酌从略。后面这些理论告诉我们，虽然很多方程不能求解，然而我们可以从另外的角度去认识它、掌握它，有时不仅可以了解它的局部性质，甚至还可以了解它的全貌。

自学数学首先要选择课本。现在介绍流行的几种课本，略加分析，供读者参考。

《常微分方程基础》，丁同仁编，1981年，上海科学技术出版社出版。属于《大学基础数学自学丛书》。这本书取材精炼，深入浅出，考虑到自学的困难，作了一些必要的启发或描述。每章末尾有小结，可以作为自我检查的标准。我们认为这本书可以作为基本的自学课本。

《常微分方程讲义》，叶彦谦编，1981年，人民教育出版社出版。这本书的特点是理论严谨，注意联系实际，特别是弹簧振动、单摆振动、抛射体的运动方程，贯穿全书。用这些实例和理论对比，就能看到各章理论的作用和应用范围，也可以体会常微分方程理论发展的脉络。我们认为它可以作为主要参考书。

《常微分方程》，贺建勋，王志成编，1979年，湖南科学技术出版社出版。这本书取材广泛，内容丰富，从基本理论部分开始，每章附有一些近代课题，例题和习题都很多。可以参考。

《微分方程及其应用》上、下册，M·布朗著，张鸿林

译，1979年，人民教育出版社出版。这书介绍了许多应用的实例，涉及范围很广，有物理学、工程学、地质学、生物学、医学、经济学、军事科学等等，而且叙述生动。因此，它对许多部门的读者都是一本有趣的参考书。

选好课本和参考书之后，应该根据课本的内容制定比较详细的学习计划，这包括划分单元和按单元分配学习时间。大学数学系常微分方程授课时数是76～85，自学可根据条件，适当增加。为便于自学的读者，我们提供一个时间表，作为参考。

常微分方程自学时间安排表

单元	内容	学时
一	基本概念	12
二	初等积分法	30
三	基本理论	36
四	线性常微分方程的一般理论	48
五	线性常微分方程组的一般理论	48

每读一部分，都要作适量的习题。关于《常微分方程基础》的习题，我们只提出章节号，不再指出作哪几个，因为在编书的时候，作者已细致地考虑过习题的安排，数量不大，希望读者都能做完。个别难题注明了星号，读者可自行掌握。《常微分方程讲义》的习题，我们指出了章节和题号。

关于常微分方程理论的几个分支和一阶偏微分方程，自学的读者可以根据个人的自学情况，安排一定的时间进行学习。

二 基本概念

这个单元包括《常微分方程基础》第一章或《常微分方程讲义》的绪论部分。其中交代本课程的学习目的、主要内容，引入一些基本概念。有些概念只是初步介绍，需要反复学习才能逐步深入理解。

读者不要误认为这是“开场白”，可有可无。事实上，这里介绍了常微分方程、解、通解、特解等基本概念，这是整个课程的基础部分。《常微分方程讲义》还提出了学习常微分方程应注意的几个问题，对自学的读者更有指导意义。

从实际问题导出微分方程的时候，首先要搞清楚导数、导函数、二阶导函数…的物理意义和它们之间的关系。以力学问题为例，如果以$y=f(x)$表示路程，那么$\frac{dy}{dx}$表示速度，$\frac{d^2y}{dx^2}$表示加速度等等，把这些用于牛顿第二定律，就是

$$F=m\frac{d^2y}{dx^2}。\tag{1}$$

再把作用于系统的力搞清楚，也就是：共有多少个力作用于系统上（如阻力、恢复力等）；每个力的数学表达式是什么。在这基础上求和得到

$$F=\sum_i F_i。\tag{2}$$

把（2）代入（1），就得到微分方程。

在具体处理物理问题的时候，往往只考虑主要因素，而忽略一些次要因素，这样会使我们较快地把问题解决。比如，讨论自由落体运动的时候，只考虑地心引力，而略去空

气阻力、风力、空气湿度等因素。

学完这部分后，可作《常微分方程基础》的习题1.1和1.2，或《常微分方程讲义》《绪论》部分的习题1、2、3、4、7、8。

三 初等积分法

这一部分是《常微分方程基础》的第二章或《常微分方程讲义》的第一章，介绍一阶方程的积分方法。这一部分看来简单，却包括了自出现微分方程以来所获得的最主要的一阶方程的求解方法。

从微分方程出现的那天起，数学家们便把主要精力放在方程的解法方面；直到现在，这仍然是微分方程教材的中心问题之一。本章介绍的分离变量法、一阶线性方程、全微分方程是三种基本解法。有些方程经过适当的变换可以归于这些情形之一，算是间接属于这种情形。现在把各种方法分别说明如下：

（一）分离变量法：这种方法把两个变量同等看待。要点是把两个变量分离开，使它们各居于等号的一边，然后在等号两边分别积分。在计算过程中，如果需要乘、除某些因子，注意不要丢掉某些特别的解。

学完这一部分，可作《常微分方程基础》习题2.1，或《常微分方程讲义》第一章第1节的1、2(2)(3)(5)(6)、5、6各题。

（二）一阶线性微分方程：这一部分是《常微分方程基础》第二章第二节或《常微分方程讲义》第一章第二节。首先要注意线性非齐次方程和齐次方程的对应关系，方程的自

由项是零的时候，叫做齐次方程，自由项不是零的时候，是非齐次方程。再注意二者在解法上的联系，这里有两种解法。

解法一 （《常微分方程讲义》），设已知对应齐次方程的通解是$C\Phi(x)$，令非齐次方程的解是$C(x)\Phi(x)$（$C(x)$是x的函数，待定），把它代入方程，使方程变成恒等式，由此确定$C(x)$。通常把这个方法叫做常数变易法。

解法二 （《常微分方程基础》），叫做积分因子法。

这一部分可作《常微分方程基础》的习题2.2，《常微分方程讲义》第一章第2节习题的2(1)(3)(8)和1各题。

（三）初等变换：坐标变换是很有力的数学工具。利用初等变换解常微分方程，原则上是通过变换把不会解的方程化成会解的类型。我们这里只提出两个类型的方程：齐次方程（注意，这里的齐次方程的定义和上面所谈的不同）．可通过变换化成变量成分离型；贝努利方程，可以化成一阶线性方程。读者要注意，《常微分方程基础》一书把贝努利方程作为一个习题给出（习题2.3的第3题），《常微分方程讲义》一书却是作为例题给出的（第一章第2节，（18）式）。

这部分习题可作《常微分方程基础》的习题2.3，或《常微分方程讲义》第一章第2节的2(6)、4、6、7和第1节的2(7)(8)。

（四）全微分方程（恰当方程）：这里，主要抓两个问题：

一是判定：在什么条件下，一个方程是全微分方程，就是在什么条件下，方程可写成

$$du(x,y)=0$$

的形式。

二是求$u(x,y)$：一般采用待定函数法或曲线积分法，前者使用的更多些。

这部分习题可作《常微分方程基础》的习题2.4或《常微分方程讲义》第一章第3节的1、2、3(1)(4)(6)(10)。

(五)积分因子，在寻求积分因子的时候，要牢记全微分方程的判定条件。设把微分方程乘以某因子$\mu(x,y)$后，使它变成全微分方程，也就是

$$\mu(x,y)[M(x,y)dx+N(x,y)dy]=du(x,y), \quad (3)$$

我们把全微分方程的充要条件用于(3)式，就可以去求$\mu(x,y)$。特别是去求$\mu(x)$型、$\mu(y)$型等特殊的积分因子，而不必死记这些积分因子的条件。

这部分的习题可作：《常微分方程基础》的习题2.5，或《常微分方程讲义》第一章第3节的3(5)(8)、8、12各题。

有两个问题，请读者注意：

第一，希望能熟练地解题，首先要把各类型方程的特征搞清楚，这样才可以在接触到问题的时候，迅速地辨认它属于哪种类型，从而确定解法，提高解题速度。

第二，并不是所有常微分方程都能用初等方法求解，例如方程$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$就不能用初等方法求解。这就提醒我们，掌握可解方程的类型是重要的。同时也暗示我们下一部分——理论研究的重要性。

最后，《常微分方程基础》第二章第6节，可作为阶段复习来读（其中有的内容，在《常微分方程讲义》一书里已

见过），可作习题2.6。

四 基本理论

这一部分内容是《常微分方程基础》的第三章，或《常微分方程讲义》的第二章、第一章第4节。学习这一章应了解的问题是：为什么要研究解的存在唯一性定理；从解的几何意义进一步理解初值问题、特解和通解的关系；第三，本章重点是比卡定理，应当会构造比卡序列。

下面分述这一章的内容。

（一）方向场：这部分的目的是从微分方程的几何意义说明解的几何意义。微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{4}$$

的几何意义就是：在$f(x,y)$有定义的范围D内的每个点$P_0(x_0,y_0)$上，给定了一个斜率是$f(x_0,y_0)$的方向，于是区域D成了方向场。微分方程（4）的通解代表一族曲线，它们之中经过点P_0的曲线，在P_0处的斜率是$f(x_0,y_0)$，就是和方向场所规定的方向相切。这一部分的习题可作《常微分方程基础》习题3.1的第2题或《常微分方程讲义》第一章第4节的2、3、4各题。

（二）解的存在和唯一性定理：多数微分方程不能用初等方法求解；而很多重要的实际问题又需要我们用微分方程去描述，也就是用微分方程的解去刻画它。为解决这个矛盾，人们自然会想到近似计算。但是假若根本无解，那我们去近似什么呢？要我们去近似根本不存在的“微分方程的解”，显然是荒唐的。或者即使解存在，但不唯一，就是同

一问题而有很多解，这也等于没有逼近的目标。这就是为什么要研究解的存在性和唯一性的原因。

所谓初值问题，就是带有初始条件的微分方程，也叫做柯西问题。定理要求微分方程右端的函数连续，并且满足李普希茨条件。后一条件的作用是：把二元函数的变差的估算，化做一元函数的变差的估算，从而为逐步估算和找优级数准备条件。定理的结论中肯定存在区间的半长是 h，是为了保证逼近过程中的每步近似都跑不出定义域去，就是我们总在右端函数 $f(x,y)$ 有定义的范围里说话。学习这一部分的时候，读者应当按 $a<\frac{b}{M}$ 和 $a>\frac{b}{M}$ 画出两个图形，这样就能更深刻地体会定理的条件。

这定理的证明过程实际上是一个近似计算法。这个过程是由表达式

$$y_{k+1}=F(x,y_k)$$

用 y_k 来表示 y_{k+1}，因此只要 $y_0(x)$ 有确切的定义，便可逐次叠代下去；而令 $y_0(x)=y_0$（给定的初值）总是可以的。

为什么要证近似序列的一致收敛性？它能保证极限运算穿过积分号 $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f[\xi,y_n(\xi)]d\xi=\int_{x_0}^{x}\lim\limits_{n\to\infty}f[\xi,y_n(\xi)d\xi]\right)$，进而又可穿过函数符号（前式 $=\int_{x_0}^{x}f[\xi,\lim\limits_{n\to\infty}y_n(\xi)\,d\xi]$），为得到恒等式创造条件。

这部分的习题可作《常微分方程基础》习题3.3的1到4题，或《常微分方程讲义》第二章第1节习题的2、9、4各题。

（三）解的延拓：根据解的存在唯一性定理，所得解的

存在区间是不太长的。一般它只是$f(x,y)$的定义域D中很小的一部分。这当然会使人们不太满意。解的延拓问题就是为了解决这个矛盾提出来的。它能解决两个问题：一个问题是把解的存在范围拉长，办法是反复运用存在定理。可以用走路来比喻：从北京出发，用存在定理，到了保定；再以保定作为起点，用存在定理，到了石家庄；再到邯郸、郑州、武汉，虽然是一节一节地接起来的，却是同一条线路。这种把积分曲线逐步拉长的过程，便是解的延拓。另一个问题是解可以延拓得和D的边界任意接近。

这部分的习题可作《常微分方程讲义》第二章第2节的2、4、5各题。

（四）解对参数（或初值）的连续依赖性：以前，总认为初值x_0、y_0是定值，而微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$又是完全确定了的。但是，从实际问题的根本上考虑，在推导方程的时候，有些因素因为不十分确定，或它的作用不很显著，而被忽略。为了也反映它们的作用，有时候把它们综合成一个参数μ，纳入微分方程。这时候，方程就成为$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\mu)$的形式。于是自然产生这样的问题：当参数μ变化的时候，解是否连续变化？同样，初值x_0、y_0是测量来的，不是百分之百的准确，我们自然期望，x_0、y_0变化不大的时候，解的变化不太明显。这就必须追问，解对初值是否连续。总之，参数也罢，初值也罢，都应该看作“变量”，然后分析解跟随它们变化的情况。

解对于初值和对于参数的两种连续依赖性的定理，经过变换可以互相转化，所以通常只证其中一个，而把另一个转

化成为已证过的情形，间接地证明。比较常见的方法是采用逐步逼近法。这是比较容易想象的：设想方程右端含有参数 μ， $\frac{dy}{dx}=f(x,y,\mu)$，作逐步逼近列：

$$y_{k+1}(x,\mu)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,y_k(x,\mu),\mu)d\tau,$$

然后证明这序列一致收敛。由含参变量的积分理论知道，这序列的一致收敛性和不含参数的相应序列基本相似；因此对它要求的条件和存在唯一性定理（比卡定 理）极 其 相 似。《常微分方程讲义》的证法是，先证明一个引理（不等式），再证明连续性，这个方法在近代常微分方程定性理论中常用到。有许多书里，这部分的中心内容往往写成推论的形式。

这部分习题可作《常微分方程基础》习题 3.4 的 2 、 1 或《常微分方程讲义》第二章第 3 节的 1 、 2 、3 、4 各题。

（五）解对参数（初值）的可微性：这个问题《常微分方程基础》一书的证明，是算出函数的增量和自变量增量的比，按导数的定义推导可微性。《常微分方程讲义》的证法是用积分不等式，同时还介绍了 ε 近似解的概念。

证明的结果表明，这些导数都满足一个一阶线性微分方程。而这些方程中的每一个，都能从原方程通过形式求导的办法得到。例如，从

$$\frac{d\varphi(x,\mu)}{dx}=f(x,\varphi(x,\mu),\mu),$$

两端同时对 μ 求导，得

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{d\varphi(x,\mu)}{dx}\right]=\frac{\partial}{\partial\mu}[f(x,\varphi(x,\mu),\mu)],$$

然后应用交换求导顺序的有关定理，就可得到一个一阶线性

微分方程。

这部分的习题可作《常微分方程基础》习题3.4的1、4，或《常微分方程讲义》第二章第3节的5、6、7各题。

五 线性方程和线性方程组的一般理论

因为高阶线性方程可以化成线性方程组，所以有的书（如《常微分方程讲义》）先讲线性方程组的理论，然后作为推论，叙述高阶线性方程的有关结果。这种讲法主次分明，节省篇幅。又由于高阶线性方程比线性方程组简单，特别是，针对二阶线性方程，就能很清晰地讲清楚基本规律，叙述也简单，所以有的书先讲高阶线性方程（如《常微分方程基础》），这样讲法，学起来自然，容易接受。

（一）高阶线性方程的通解结构，对一般变系数（一般要求系数连续）高阶线性方程，主要解决两个问题。

1. 齐次线性方程的通解结构：方程的全部解构成一个n维线性空间，它的一组基底叫做基本解组。为了证明这个结论，先把线性相关、线性无关的概念推广到函数组上来，为了判定函数组的线性相关性，介绍了朗斯基行列式等概念。

请注意问题的逆，如果给了基本解组，那么就可以唯一地确定一个（首项系数是1的）n阶线性方程，它以这组函数作为基本解组。

2. 非齐次线性方程的通解结构：这个通解可表示为：

（非齐次方程通解）＝（对应齐次方程通解）＋（非齐次方程的一个特解）。

同时，它的一个特解，可由对应齐次方程的通解用常数变易法求得。

这一部分习题可作《常微分方程基础》习题4.3和4.5各题，或《常微分方程讲义》第三章第4节的2(1)(2)(4)(7)、3、4、5、6各题。

（二）常系数齐次线性方程：常系数线性方程，是高阶方程中解决的最彻底的一类。解这类方程的方法，叫做欧勒待定指数法。就是：求形如 $y=e^{\lambda x}$ 的解，把它代入微分方程，就化做λ 的代数方程，然后计算 λ，已变成代数问题了。怎么知道准有这种形式的解呢？试分析微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0,$$

其中$a_i(i=1,2,\cdots,n)$是常数，要使

$$\varphi^{(n)}(x)+a_1\varphi^{(n-1)}(x)+\cdots+a_{n-1}\varphi'(x)+a_n\varphi(x)\equiv 0$$

成立，需$\varphi(x),\varphi'(x),\cdots\varphi^{(n)}(x)$是“同类项”，在各类函数中，最明显的有这种特性的便是指数函数。

常系数非齐次方程，一般可以利用前面的理论，先求对应齐次方程的通解，然后用常数变易法求特解。当自由项比较特殊的时候，比如是多项式、或多项式和指数函数的乘积，或多项式和三角函数的乘积等等，可先选特解形式，然后用待定系数法去求它。这样求解，有时候比常数变易法简单。

这部分习题可作《常微分方程基础》习题4.4各题，习题4.5的第3题，或《常微分方程讲义》第四章第2节的1、2各题。

（三）线性方程组：这一部分主要内容有二点。

1. 线性方程组的通解结构：首先是齐次方程组通解结

构，在这里，引入了矩阵函数与列向量函数，当你把向量函数当作通常的函数（只能是形式地！）的时候，方程组的结论和方程的结论有些类似。这部分的中心结论是：齐次线性方程组的基本解组是存在的，通解就是它们的线性组合。同样，在讨论过程中引进了列向量函数的线性相关、线性无关、朗斯基行列式等概念。

至于线性非齐次方程组，主要结论是：它的通解等于它的一个特解和对应齐次方程组的通解的和；此外，它的特解可以由对应齐次方程的通解，用常数变易法求得。

这部分习题可作《常微分方程基础》的习题8.3，或《常微分方程讲义》第三章第4节的8、11。

2. 常系数线性方程组：从理论上来说，常系数齐次线性方程组的求解问题已彻底解决，也是求形如$y=ce^{\lambda x}$（其中C是常数列向量，λ是常数，都是待定的）的解，把它代入微分方程组中，然后分两步进行：第一步求特征方程的根；第二步求特征向量和跟它相当的运算（如果特征根有重根，只求特征向量就求不出通解）。

为了探讨解的结构，往往借线性代数中矩阵A能变成若当标准形J的理论，知道方程组$\frac{dx}{dt}=Ax$经过坐标变换，能变成方程组$\frac{dy}{dt}=Jy$，这组新方程包括若干互相独立的小组，而每小组的末一个方程是可以分离变量的一阶线性齐次方程。把这方程的解代入倒数第二个方程，就得到一个一阶线性非齐次方程，又可以解出来。再代入前一个方程，又得一个一阶线性非齐次方程。这样一个个推算，一定能把每小组解完。这样就有了一条解常系数线性方程组的路线。尽

管化A为J是很复杂的工作，一般不易实现，然而从理论上来说，是可以做到的。因而，我们可以把常系数线性非齐次方程组的解的结构分析清楚。在这基础上，便可以采用待定系数法去求解了。

至于常系数线性非齐次方程组，在掌握了对应齐次方程组的通解的基础上，可以用常数变易法，或在特殊情况下，用待定系数法求特解。

这部分习题可作：《常微分方程基础》的习题8.4、8.5，或《常微分方程讲义》第四章第1节的1、3、4、5各题。

（四）二阶线性方程的幂级数解法：可以设想，当二阶线性微分方程的系数是解析函数的时候，它的解也一定是解析的，也就是可以展成幂级数。事实上也确实是这样。于是，把方程中的系数、方程的解都在$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y'_0$处当作幂级数，然后寻求形式是$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$的解，其中$C_n$（$n=0,1,2,\cdots$）待定，把它代入方程中去，用比较同次幂的系数的办法来确定它们。在学习或自己做习题的时候，有两点需要注意：一是有些数，在计算过程中，不要急于算出来，比如2·3，不必急于写成6，而写成3!的形式，往往便于总结规律，以求得通项的表达式。二是关于幂级数的形式，在常点邻域所展的级数是通常的幂级数，而在奇点邻域中，一般要求广义幂级数。

这部分习题可作：《常微分方程基础》第五章的习题都可作，如果时间紧，可只作习题5.2、5.4的1、2、5.3的

3，或《常微分方程讲义》第五章第1节的1、2、5、6、7各题。

六　自我测试题

1．求微分方程$xy\frac{dy}{dx}-y^2=x^4$的通解。

2．求微分方程$x^4\ln x dx+3x^2y^2dy=2xy^3dx$的通解。

3．曲线的向径和切线正交，并且经过点$(-1,0)$，求这曲线。

4．求方程$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=t\sin 3t$的通解。

5．给出微分方程

$$\frac{dy}{dx}=y^2-x^2$$

（1）$y(0)=0$，R：$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$，试求解的存在区间（根据存在定理），并计算近似解y_0,y_1,y_2,y_3；

（2）$y(0)=1$，R：$|x|\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 2$，试求解的存在区间，并计算近似解y_0,y_1,y_2。

6．求解微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x-2y,\\ \frac{dy}{dt}=2x-y。\end{cases}$$

复变函数论

陈方权

一 概 述

复数的概念起源于十六世纪的欧洲，当时有一位意大利的数学家，提出了这样一个问题：如果有一个数的平方是－1，数学将会发生什么样的变化？复数就是从这时候开始被引入数学领域的。虽然在以后很长的一段时间里复数被许多人认为是一种虚无缥缈的概念，然而那个古老问题所显现出来的光辉的数学思想，却吸引了不少后来者的兴趣，他们对复数和复数域上的函数——复变函数作了大量的研究。到了十九世纪，由柯西、魏尔斯特拉斯、黎曼等著名数学家对复变函数的理论作了系统的整理和发展，从而使“复变函数论”成为数学中一个独立的分支。近一百年来，复变函数论得到了蓬勃的发展，而且它和其他许多数学分支、其他许多自然学科建立了越来越广泛和密切的联系，因此，复变函数论已成为目前多数理工科大学中主要系科的必修课程。

一般院校中复变函数论课程开设在三年级上学期，这是由于在学习这门课程之前必须学完解析几何、高等代数和数学分析三门基础课。特别是数学分析和本课程的联系极其紧密，本课程的许多基本概念都是由数学分析中相应概念推广

而来的，因而在学习复变函数的同时复习数学分析中有关的知识是非常必要和很有益处的。

现行复变函数论教材比较多，但是作为自学课本，建议使用《大学基础数学自学丛书》中的《复变函数论基础》一书为好。这本书是沈燮昌编，1982年，上海科学技术出版社出版的。

这本书基本上符合1980年五月由教育部委托武汉大学制订的综合大学“复变函数教学大纲”的要求。全书篇幅虽然比较大，但对概念的阐述，定理的证明都极其详尽，严谨，并配有大量例题，对自学者十分方便。书的每一章开始，对这一章的主要内容和它在全书中的地位作了简要说明，这些“开场白”读者应反复阅读。每一章的末尾都有小结，概括本章主要内容，并指明学习本章的时候应注意的问题，以帮助读者系统地掌握这一章的重点；各章、节的后面配有大量的习题和思考题，自学者应尽可能全部完成。

对于习题和思考题，建议读者这样来做：每学完一节之后，至少完成这节全部习题的二分之一；经过一次反复阅读后，应该可以完成三分之二到四分之三；剩下少量难题，一部分可在学完一章之后来完成，极个别的难题却需要反复思考，甚至要待全书学完后再来完成。另外有不少习题往往有多种解法或证法，因而做题的时候不要把自己的思路局限于习题所属的章节。

《复变函数论基础》一书前七章是复变函数论的基本内容，初学者可先略去第八、第九两章。建议读者根据自己的情况安排一个300 学时左右的学习计划，比如可以参照下面这个表安排自学。

复变函数论自学时间安排表

单　元	内　　　　　　容	学　时
一	复数	25
二	解析函数	35
三	解析函数的积分理论	35
四	解析函数的级数展开(包括期中复习)	55
五	留数理论和它的应用	25
六	解析开拓	25
七	解析函数的几何理论	75
八	总复习	25

对于工科读者建议以工程数学中《复变函数》一书为主，参考《复变函数论基础》进行自学，学时数可以减少三分之一左右。

下面我们就按照《复变函数论基础》一书中前七章的顺序逐章加以分析，作为原书各章引言和小结的补充说明。

二　复　数

我们把形如$x+iy$（x、y是实数）的数叫做复数，这是在研究二次代数方程的解的时候自然引出的。例如用配方法求解二次方程$x^2-2x+17=0$，可得形式解 $1\pm4\sqrt{-1}$。它可以看作是一种广义二次根式，它的一般形式是

$$x+y\cdot\sqrt{-1},$$

这就是复数的原形。这种数的四则运算规定为和二次根式的四则运算完全一样，只是在碰到$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$的时候，认为乘积是-1，而不是1。这当然是很自然的，因为$\sqrt{-1}$是作为方程$x^2+1=0$的一个根而引用的记号，它就是所谓虚单位i。

方程$x^2+1=0$的另一个根$-i$可叫做共轭虚单位，用它构造的复数$x-iy$和$x+iy$构成一对共轭复数，利用记号$z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$导出的公式

$$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\quad y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}),$$

在沟通实数和复数的联系上起着重要的作用。

复数的严格定义是作为复数域的元素给出的，这方面的内容可在近世代数教程中找到，初读者可先不去深究。

把笛卡儿坐标平面改造成复平面，并建立起复数和复平面上的点之间的一一对应关系之后，复数不再被看作虚幻的概念，它有了实实在在的几何原型，而且复数的代数运算法则也得到了明确的几何解释。

在复数中引入"模"的概念，同时在复平面上引入欧几里得"距离"作为模的几何解释，这不仅在复数和初等平面几何学或平面解析几何学之间架起了一座桥梁，而且更重要的在于它是以后极限概念的基础。

很好地了解复数辐角的多值性和周期性是十分重要的，这不仅有助于我们理解为什么任意一个复数开n次方将有n个根，并且也为以后了解多值函数的本质作好了准备。

在复数集中引入一个特殊数——无穷大，这并不是什么惊新立异的想法，而只是希望无穷大和有限复数具有更多的

共性。这一点在引入复数球面、并用球极投影的方法建立了无穷大的几何原型——复平面上的无穷远点复数或球面上的北极之后，就变得容易理解了。在以后讨论解析函数的性质的时候，我们将看到这一规定也显得非常和谐。

做本章各节习题的时候，要尽可能熟悉和运用复数的表示法和运算法。举例如下：

例　作图表明满足 $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$ 的 z 点集。

解　设 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$，题设不等式是 $0<\arg w<\dfrac{\pi}{4}$，也可表作 $(\operatorname{Im}w>0)\cap(\operatorname{Re}w>\operatorname{Im}w)$，其中 $\operatorname{Im}w>0$ 等价于

$$\operatorname{Im}w=\frac{1}{2i}(w-\overline{w})=\frac{1}{2i}\left(\frac{z-i}{z+i}-\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i}\right)$$

$$=-\frac{z+\overline{z}}{|z+i|^2}>0,$$

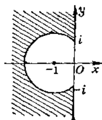
就是 $\operatorname{Re}z<0$；而 $\operatorname{Re}w>\operatorname{Im}w$ 等价于

$$\operatorname{Re}w=\frac{1}{2}\left(\frac{z-i}{z+i}+\frac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i}\right)$$

$$=\frac{z\overline{z}-1}{|z+i|^2}>\operatorname{Im}w=-\frac{z+\overline{z}}{|z+i|^2},$$

就是 $z\overline{z}-1>-(z+\overline{z})$，化简成 $|z+1|>\sqrt{2}$。由以上推导可见，所求点集就是 $(\operatorname{Re}z<0)\cap(|z+1|>\sqrt{2})$ (92页右图中阴影部分)。

最后要注意复数之间不存在大小关系，因而也不存在不等式运算。在复数中见到的不等关系，实质上都是关于实数给出的。如重要的三角不等式就是关于复数的模（这是实数）给出的。再如上面例子中的不等式实质上都是实数不等式。



三 解析函数

复变函数的定义和它的极限、连续、导数、微分等概念，同单变量实函数的相应概念在形式上完全一样，但是实质上却有很大的差别。这些差别表现在：

第一，一个复函数所表达的某种关系等价于两个二元实函数所表达的对应关系，显然比单变量实函数的情形要复杂得多。从几何意义上看，复函数实现的是平面点集到平面点集的映射，其间的对应关系不存在象单变量实函数那样直接的图象。

第二，复函数的极限和连续的概念也同两个二元实函数的相应概念等价。特别是自变量的极限过程 $z\to z_0$，由于是在平面上进行的，且不受方向和路径的任何限制，因而比实变量 x 沿实轴趋向于某一 x_0 的情形（仅可能有从左，从右或左右振荡这三种形式）要复杂得多。

第三，极限过程复杂，必然使导数概念复杂。这表现在：两个二元实函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 偏导数虽然存在或可微，却不足以保证复函数 $f(z)=u+iv$ 关于复变量 z 可

导或可微，而必须再要求 u 和 v 满足 $C-R$ 条件。

第四，在区域上处处可导的复函数（就是解析函数）具有许多重要性质，而一个在区间上处处可导的实函数却不能保证具有任何类似的性质。在这里要提醒读者注意所谓"函数在一点解析"是指函数在这点的某个邻域内处处可导，不能误解为函数仅在这点可导。

第五，解析函数的实部和虚部实际是 $C-R$ 方程（这是一个一阶偏微分方程组）或拉普拉斯方程（这是一个二阶偏微分方程）的连续可微解，而在区间上可导的单变量实函数却仅是某些常微分方程的解。

第六，复函数导数的几何意义也完全不同于单变量实函数的导数的几何意义，也不同于二元实函数偏导数的几何意义，这将在第七章里讲述。

复初等函数各以同名实初等函数作为它们的特殊情形，而且保持了实初等函数的全部基本运算性质。但是读者要特别注意复初等函数特有的性质：指数函数和三角函数的关系以及它的周期性的产生；对数函数的多值性以及由此引起的对数函数运算性质的新含义；反三角函数和对数函数、根式函数的关系；初等多值函数的单值分支的划分方法（定义区域，值域和各分支间的相互关系）。

四　解析函数的积分理论

学习这一章首先要弄清复积分的定义、积分的存在条件、化成实积分的方法和积分的基本性质。但是这一章的重点是讨论解析函数的积分理论，建议读者依照下述三条线索掌握本章的内容：

（一）柯西积分定理 $\left\{\begin{array}{l}\text{柯西积分公式}\\ \text{和高阶导数}\\ \text{原函数定理}\end{array}\right\}$ 莫瑞拉定理.

其中柯西积分定理是解析函数理论的基本定理。读者应着重弄清这一定理的基本条件和结论，以及各种推广的情形。关于定理证明应着重弄清"解析"的条件是怎样起作用的。这一部分最后落实到用积分工具给出的解析函数的充要条件。

（二）柯西积分公式 $\left\{\begin{array}{l}\text{平均值定理}\\ \text{—最大模原理}\\ \text{柯西不等式}\\ \text{—刘维尔定理}\end{array}\right\}$ 代数基本定理。

这里包括了用柯西积分公式推出的解析函数的一些重要性质。作为这些性质的应用证明了代数基本定理

（三）利用柯西积分定理和柯西积分公式（包括高阶导数公式）求复积分 $\int_L f(z)\cdot R(z)dz$ 的值，这里 L 是以有限条简单分段光滑闭曲线所围成的有界区域 D 的正向边界，$f(z)$ 在 $\overline{D}=D+L$ 上解析，$R(z)$ 是有理函数，在 L 上连续。

特别要指出的是积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{dz}{(z-a)^n}=\begin{cases}1 & (n=1,\ a\in D),\\ 0 & (n\neq 1 \text{ 或 } a\overline{\in}\overline{D})\end{cases}$$

在解析函数理论研究中起着重要作用。

贯穿以上三条线索的共同核心是柯西积分公式，这公式在解析函数的理论研究和实际应用中都占有极重要的地位。

五　解析函数的级数展开

复数项级数、复变函数项级数的基本概念和重要性质,跟实数项级数、实函数项级数中相应的概念和性质几乎完全一样，但是有一条性质却有本质的差别，这就是关于函数项级数的逐项可微性。建议读者把关于实级数和复级数逐项可微性的两个定理仔细地加以比较，并弄清楚柯西积分公式在证明复级数逐项可微性定理中所起的作用。

这一章的核心是用柯西积分公式导出圆域上解析函数的泰勒展式和环域上解析函数的罗朗展式，并用这些展式导出以下所列解析函数的重要性质：

(一) 柯西不等式 (这是第二次推导)；

(二) 解析函数的斯瓦兹积分公式和调和函数的泊松积分公式；

(三) 解析函数零点的孤立性；

(四) 解析函数的唯一性定理；

(五) 孤立奇点的分类和各类孤立奇点的特性；

(六) 两个重要的解析函数类 (整函数和亚纯函数) 的主要特性。

读者必须从这一章学会把初等函数在指定的区域里展开成为泰勒级数或罗朗级数的那些基本方法：利用公式求泰勒展式的系数；利用已知初等函数的展式(主要是函数$\frac{1}{1-z}$, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\ln(1+z)$, $(1+z)^a$在$z=0$点的泰勒展式) 的变形；利用已知展式的代数运算；利用已知展式的逐项积分法和逐项微分法；利用待定系数法和级数代入级数

法（已知展式的复合）等。

例如：求$\frac{1}{(1-z)^2}$在$z=0$的泰勒展式。

方法一，$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}z^k\right)'$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}kz^{k-1} \qquad (|z|<1),$$

方法二，$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^k\right)^2=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}z^n z^{k-n}$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)z^k \qquad (|z|<1).$$

解析函数在无穷远点邻域里的罗朗展式和它在无穷远点的性态的讨论是较难掌握的两个内容。对于前者一般采用两种方法：第一种方法是，无穷远点的邻域 $R<|z|<+\infty$就是以原点为心的环域，这环域上的罗朗展式就是在无穷远点邻域里的罗朗展式；第二种方法是把$f\left(\frac{1}{z}\right)$在$0<|z|<\frac{1}{R}$展开成为罗朗级数，再用$\frac{1}{z}$代替展式中的$z$，就得到$f(z)$在无穷远点的罗朗展式。对于后者重要的是弄清概念，可把函数在无穷远点的性态和在有限孤立奇点的相应的性态进行比较，再对照实例加深理解。

六　留数理论和它的应用

这一章讨论的主要内容是，在积分路径内部仅含有孤立

奇点的解析函数的积分问题。主要方法是借助于柯西积分定理和函数在孤立奇点的罗朗展式，再通过逐项积分，把求积分的问题转化成为求函数在各个孤立奇点罗朗展式中负一次幂的系数问题。这就是留数概念和留数基本定理所表明的事实。

学会了计算各类孤立奇点的留数之后，很容易看出第三章里柯西积分定理和柯西积分公式都能用留数计算法加以验证，就是它们都是留数计算法的特殊情形，因而本章所讨论的积分法也可以看作是柯西积分定理和柯西积分公式的推广。

留数基本定理在理论上的发展之一，是通过讨论函数的对数留数而确定函数在积分闭路内部零点和极点个数的差，利用这一结果的几何解释（就是辐角原理）推证出的鲁歇定理，在解析函数理论研究和实际应用中都起着重要的作用。

留数基本定理的直接应用是计算实的定积分，读者应着重学习这种积分方法的本质。建议读者弄清以下几个问题：

（一）根据什么原则选定辅助被积函数？

（二）根据什么原则确定辅助积分围路？

（三）沿辅助路径的复积分是怎样计算的？

七 解析开拓

本章的中心问题是怎样把解析函数的解析性区域扩大到尽可能大的程度，从而使我们对解析函数的构造有更深刻更全面的认识。

这里，首先要解决扩大解析性区域的可能性，唯一性和扩大的途径这样三个问题，书中对这三个问题逐一作了详尽的回答。

其次应该弄清什么是一个解析函数的尽可能大的解析性区域？它有什么样的特征？扩大解析性区域后得到的解析函数和原来的函数之间有什么联系？可能产生什么差别？

本章为了回答上述问题引入了解析元素、解析开拓链、完全解析函数、自然边界等概念。特别是当完全解析函数是多值函数的时候，为了使它和单值解析函数在概念上统一起来，引入了黎曼面的概念。黎曼面直观来说是一种不占有几何空间的多层连通区域。在黎曼面上讨论扩大解析函数的解析性区域的问题，最终得到的一定是单值完全解析函数。

在一个完全解析函数$f(z)$ 的多层黎曼曲面 的各层上，分别取下具有相同几何位置且互不相交 的 区 域 $G_1, G_2, \cdots$（统一用G来表示），那么解析元素$(G, f_k(z))(f_k(z)=f(z)$ $z \in G, k=1, 2, \cdots)$就都是G上的单值解析函数，它的每一个就叫 $f(z)$ 的单值解析分支。这实际上是对多值完全解析函数 $f(z)$ 在特定的局部区域G上采取了一种局部单值分解的措施，这对于多值解析函数的应用是十分有效的。

本章介绍了利用多值解析函数的局部单值分解的方法，来解决某些实函数定积分问题，它的基本思想和第五章里用留数计算定积分的方法一样，它们的差别在于这里作为辅助被积函数的是一个多值解析函数的局部单值分支。

本章内容比较抽象难懂，读者要耐心地反复阅读几次。特别是关于多值完全解析函数的黎曼面的概念，以及它的局部单值分解的方法，更难理解和掌握。建议读者首先弄清 $w=\ln z$， $w=\sqrt{z}$ 这两个完全解析函数的多值性产生的原因，黎曼面是怎样依据解析开拓的方法而构造起来的；其次再结合在定积分中的应用，弄清在特定条件下怎样选取局部

单值分解的区域，以及怎样确定所需的分支在分解区域里各点的值。

八 解析函数的几何理论

这一章讨论解析函数的映射（或者叫做变换）问题，主要内容可分成两大部分：一部分是从理论上探讨映射的一般性质，另一部分是解析函数映射的实践问题。

（一）解析映射的一般性质：主要有七点。

1. 解析函数把区域映射成区域；
2. 解析映射的局部单叶性；
3. 单叶解析映射的逆映射也是单叶解析映射；
4. 单叶解析映射的第一类保形性；
5. 单叶解析映射的对称原理；
6. 边界对应定理；
7. 黎曼存在和唯一性定理。

这些性质的证明都比较难以理解和掌握，但是这些性质在解析映射的实践中起着重要的作用，因而对于这些性质所述的条件和结论一定要弄清楚。“第一类保形性”是一切具有非零导数的解析函数的几何特征。而与此有关的“转动角度”及“伸缩率”这两个概念则揭示了非零导数的辐角和模的几何意义。这些概念都要很好地理解和掌握。另外黎曼存在和唯一性定理是解析函数几何理论的奠基性定理，它在理论研究和实际应用中都起着极其重要的作用，必须引起我们的重视。

（二）解析映射的实践问题：主要介绍了由初等解析函数和它的复合所实现的第一类保形映射，其中特别是关于分

式线性映射的特性更是作了详细的论证。另外还介绍了上半平面到多角形区域的一般映射公式（这一部分内容已超出大纲要求的范围，初读者可先略去）。在实际应用中所碰到的初等解析映射问题可分成两类：一类是已知一个区域D和一个初等解析函数$w=f(z)$，怎样确定区域D在$w=f(z)$映射下的象区域？这类问题可分两步进行，首先把$w=f(z)$分解成一些基本初等函数的复合，其次按复合顺序逐步完成各个基本初等函数的映射就行。另一类问题是对于给定的两个单连通区域(它的边界具有一定的形状)求一个能实现其相互映射的单叶解析函数。有时候还附加一些条件，使所求映射是唯一确定的。解决这类问题比上一类难，但仍可以根据原区域边界的形状，通过一系列基本初等解析函数的映射把原区域变成指定的另一个区域，再把这一系列基本初等解析函数顺次复合起来就得到所求。如果另有附加的唯一性条件，那么就应检验所得函数是否满足这一条件，或通过确定所得函数中的某些参数而使条件得到满足。这类问题的解答过程变化多端，需要读者不断摸索、总结。为了做好这方面的练习，读者必须熟练地掌握基本初等解析函数的映射特性，其中特别是分式线性映射更加重要。另外读者也必须注意解析映射的一般理论在解决以上两类映射的应用问题的时候是怎样发挥它的理论作用的。

九 自我测试题

(一) 基本题

1．试解以下方程，并画草图标明根的位置：

(1) $(z-1)^4=-16$；(2) $\sin z=2$。

2. 试述函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在z_0点解析的定义和种种充分必要条件，并用所述的充分必要条件判明下列函数在 $z=0$ 点是否解析（每个函数都只要求用一种方法来判定就行）：

（1） $f(z)=z\cdot \mathrm{Re}z$；　（2） $f(z)=\dfrac{1}{z}$；

（3） $f(z)=e^{z^2}$。

3. 计算下列积分：

（1） $I=\int_c \dfrac{e^{iz}}{(z+i)z^3}dz$，$c$是$Z$平面上不经过0 和 $-i$ 两点的各种可能的简单分段光滑闭曲线（逆时针方向）；

（2） $I=\int_c \ln\dfrac{z+1}{z-1}dz$，$c$是圆周 $|z|=2$ （逆时针方向），$\ln\dfrac{z+1}{z-1}$表示函数$\ln\dfrac{z+1}{z-1}$沿c解析的任一单值分支；

（3） $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}$ （$a>0$，$a\neq 1$）；

（4） $I=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos x}{x^3+1}dx$　这里I是积分主值。

4. 指明函数$\dfrac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$（$n$是正整数）在扩充复平面上的全部孤立奇点（极点要求指明阶数），并求出当 $n=2$ 时各孤立奇点的留数。

5. 求以下区域D经指定函数 $f(z)$ 映照所得的象区域G（要求（1）画出D和G的草图；（2）要说明G是根据哪些映射性质确定的）：

（1）D：$\mathrm{Re}z<0$，$f(z)=\sqrt{z}$（$\sqrt{z}$取满足条件$\sqrt{-1}=-i$的分支）；

（2）D：$(\mathrm{Re}z<0)\cap\left(\left|z+\frac{5}{3}\right|>\frac{4}{3}\right)$，

$$f(z)=\frac{z-1}{z+1};$$

（3）D：$(\mathrm{Re}z<0)\cap(0<\mathrm{Im}z<\pi)$，

$$f(z)=\sin iz;$$

（4）D：$(\mathrm{Im}z>0)$ $(z=e^{i\theta},\frac{\pi}{2}\leqslant\theta<\pi)$，

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)。$$

6．求把区域D：$(\mathrm{Re}z>1)\cap(|z-2|>1)$映射成为单位圆的单叶解析函数$w=f(z)$，并且使$f(5)=0$，$f'(5)>0$。

（二）综合练习题

1．设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D上解析，且满足关系式$u=v^2$，求证$f(z)$在D上是常数。

2．$f(z)$在z_0点解析，且$f'(z_0)\neq 0$，c表示一圆：$|z-z_0|=r$（逆时针方向），试证当r足够小时，有

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)}=\int_c\frac{dz}{f(z)-f(z_0)}。$$

3．设$f(z)=\frac{3z-5}{2z+1}$，求$f(z)$在闭圆域$|z-1|<1$上的最大模和最小模。

4．设$f(z)$在区域D：$(|z|<2)\cap\left(|z-1|>\frac{1}{2}\right)$内解析，试证$f(z)$在$D$内可展开成为如下形式的级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}\frac{1}{(z-1)^n},$$

其中$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$ ($n=0$, 1, 2, …),

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(\zeta)(\zeta-1)^{n+1}d\zeta(n=1,2,\cdots),$$

这里c是D内环绕0，1两点的任意一条简单光滑闭曲线（逆时针方向）。

5. 设$f(z)$是整函数，且$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}=0$，证明$f(z)$是常数。

6. $f(z)$和$g(z)$在区域D内除z_0点外处处解析，而z_0点同时是$f(z)$和$g(z)$的n阶极点，如果有点列$\{z_k\}\subset D$满足以下条件：（1）$z_k\neq z_0$但$z_k\to z_0$ ($k\to+\infty$)，（2）$f(z_k)=g(z_k)$ ($k=1$, 2, …)，试证明在$D-\{z_0\}$上有$f(z)\equiv g(z)$。再讨论如果z_0是$f(z)$和$g(z)$的本性奇点，上述命题是否还成立？（要说明理由。）

7. 证明在上半平面单叶解析且把实轴双方单值映照成为实轴的函数只能是实系数整线性函数，就是$w=az+b$（a，b是实数）。

实变函数论

蒋 铎

一 概 述

数学分析讨论了连续函数、它们的微分和积分、以及微分和积分的联系（牛顿-莱布尼茨公式），在那里，有许多问题未能深入讨论。例如，一个连续函数能不能处处没有导数？不连续的函数能不能积分？对不连续的函数积分，牛顿-莱布尼茨公式是否还能成立？用函数描写曲线，曲线的长度是什么？…在理论和实际运算中，常要在积分号下求极限或累次积分换序等，这时对函数列以及函数所加条件都比较苛刻。对这一类问题作进一步的探讨，是很有意思、很有益处的。现已知道，要进一步讨论的这大多数问题，都需要把积分理论予以改进，才好解决。因此实变函数论多以 L 积分作为重点。

实变函数论对于进一步学习其他课程，例如概率论、泛函分析、傅立叶分析等，是必要的基础。

实变函数论这门课，对于初学者来说，抽象程度比较高，因此，一般安排在高年级学习。在现行教学大纲中，规定了综合大学数学专业（包括计算数学专业）的授课时数是85学时，另有习题课每周1学时。高等师范院校数学系授课

时数是72学时。由于这门课比较抽象，所以自学时间应适当增加。它的习题有些也相当难，这样的题目，要花费相当大的时间和精力，才能解出。

现在已出版的实变函数论教材有：

《实变函数与泛函分析概要》(第一册)，郑维行、王声望编，1980年，人民教育出版社出版。这本书是高等学校试用教材，是综合大学数学专业的教材。条理比较清楚。可选作自学课本。

《实变函数论与泛函分析》（上册），夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌编著，1978年，人民教育出版社出版。本书在测度论中先讲一般情况，对初学者来说不易掌握。本书写得比较详细，例题也较多，可选作自学课本，或作为参考书。

《实变函数论》，苏联那汤松著，徐瑞云译，分上、下二册，1958年，高等教育出版社修订出版。本书写的通俗易懂，适于自学。但它没有讲一般的测度论。现在没有再版，不易买到。如有这书，可做参考。

《实变函数论》，江泽坚、吴智泉合编，1961年，人民教育出版社出版。其中有一个较长的序，对于学习实变函数的意义和以后的应用，做了比较详细的说明，自学的读者可作参考。

实变函数论的内容包括以下四部分：

（一）集论；

（二）测度；

（三）可测函数；

（四）积分。

二 集 论

集论包括一般的集和点集两部分。当然一般集的性质也适用于点集，其中讨论集的概念、运算、集的映射、势等。点集讲的是比较具体的集，例如直线上的点集 n-维欧氏空间的点集等。因为在直线上（或 n-维欧氏空间中）点间有了距离关系，又可讨论有关极限的一些事项。

（一）集的概念和运算：对于集的概念，我们提出应注意的三点：

1．空集ϕ虽不包含任何元素，但它本身并不是言之无物的。

2．定义有限集的时候，需要先承认自然数。就实变函数论这门课程来说，这样做是完全可以的。为了叙述方便，空集当做有限集。

3．一般谈论集，都是限定在某个范围之内，例如在实数系里讨论某些数集，在数直线上讨论一切开区间的集等，而不是不加限制的集，例如"一切集合构成的集"，因为这样会导致悖谬。

德·摩根定理在集的运算中是很方便而且有趣的法则，应该注意，这法则常能使证明变得简便。

（二）势和映射：映射是数学中的基本概念之一。映射

$$f: A\to B$$

中的f是既定两集A、B间的一种关系。在这关系之中，A和B并不对称。对于A的每个元素x，总有B的唯一元素和它对应：$y=f(x)$，然而并不是B的每个元素y必是A中某个x的像。关于映射概念，有六点要分辨清楚。

1．一般来说，f 只能把 A 变成 B 的某个子集，就是

$$f(A)=\{f(x):x\in A\}\subset B,$$

这时候就说"f 把 A 映入 B 内"。

2．如果 $f(A)=B$，就是 A 的像充满了 B，就称 f 是满射，并说"f 把 A 映满 B 上"。显然如果认为 f 是把 A 变成 $f(A)$ 的，也就是取 f 的自然值域是 B，那么 f 必然是满射。

3．如果对于 B 的一个 y，A 中最多能有一个 x 使得 $f(x)=y$，就把 f 叫做单射，或者说 f 有逆映射 f^{-1}。这 f^{-1} 是这样一个映射，它的定义域是 f 的值域 $f(A)$，而 f^{-1} 的值域是 A；当 $y=f(x)\in f(A)$ 的时候，$f^{-1}(y)=x$。

单射又叫做一一映射。

4．既是满射又是单射的映射叫做双映射。

5．从集的角度来说，如果先有了两个集 A、B，并有一一映射 f，使 $f(A)=B$，就说两集 A 和 B 成一一对应，或说 A 和 B 对等。可见一一映射和一一对应是不同的概念。

6．郑维行、王声望编《实变函数与泛函分析概要》第一册第5页第三段中所说的 $f^{-1}(B_0)$，$(B_0\subset B)$，表示 B_0 在映射 f 下的原像，这是一种表示集 $\{x:x\in A, f(x)\in B_0\}$ 的方法。这个符号并不意味着 f 有逆映射。可能 B_0 的某个 y 根本没有 A 里的 x 使得 $f(x)=y$，也可能不止一个 $x(x\in A)$ 满足 $f(x)=y$；但是不管怎样，总有

$$f(f^{-1}(B_0))\subset B_0,\quad f^{-1}(f(A_0))\supset A_0.$$

映射这一部分可参看夏道行等编的《实变函数论与泛函分析》上册。

势是重要概念。德国数学家康托尔能证明超限数的存在而不须真的构造出超限数来，这件事足以说明势这个概念的

重要性。

伯恩斯坦定理是判断两集对等的重要依据，应予注意。

用和与交形式地定义集列的上限集和下限集是：

$$\overline{\lim} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n,$$

$$\underline{\lim} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n。$$

用普通话说，它们的意思是

$\overline{\lim} E_n = \{x : x \overline{\in}$ 无限多个 $E_n\}$，

$\underline{\lim} E_n = \{x :$ 存在一个 k，使 $x \in E_{k+m}, m=1,2,\cdots\}$

这两个集在讨论函数列的收敛性的时候非常重要。

在集的序性理论中，经常用到的策莫罗选择公理（所谓抽屉原则）以及佐恩引理，初读的时候可以略去。在证明不可测集的存在和泛函延拓定理的时候要用到它们。

本章习题可作郑维行、王声望编《实变函数与泛函分析概要》第一册第一章习题的1、2、4（i）（ii）、5到14各题。

三 测 度

前面说过，我们希望改进积分的方法，现在回想过去学过的积分：

在区间$[a,b]$上，设有函数$f(x)$。把区间分成n分，分点是$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$。在$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点$\xi_i$，做出黎曼和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$。然后令小区间的最大长度

$\Delta x=\max(x_i-x_{i-1})$趋于零而求极限。如果这极限存在，并和$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$的取法无关，就把这极限叫做函数$f(x)$在$[a,b]$上的积分。这里所用到的东西，一是小区间的长度，二是函数值。当$f(x)$是很好的函数例如连续函数的时候，积分存在。我们看到，黎曼的办法是用小矩形的面积近似地代替曲边梯形的面积。当函数不连续的时候，这样代替，误差就大了。于是不能近似于真实的面积。这就是黎曼积分的弱点，是许多问题不得解决的主要原因。因此想到不要硬把函数值差别很大的（自变数的）点混在一起，而用函数值的大小把自变数的点分类，把函数值相差不大的点放在一起。例如使$f(x)$的值在y和$y+\varepsilon$之间的那些点x构成一个集：$\{x;y\leqslant f(x)\leqslant y+\varepsilon\}$。这样的集显然和$f$有关，也相当随意。这时需要研究这样的集该怎样"测量"。就是怎样确定它的测度。

一维空间里，开集的构造比较简单，因此先讲开集的测度，然后定义闭集的测度，最后定义一般可测集的测度。在二维以上的空间里，开集的构造不象一维情形那样简单，要想得到一类可测集和它的测度，一般的办法是把环上的测度扩充。

通过这一章的学习，首先要弄清一维空间测度的定义和性质。然后可以一维和二维空间作为模型弄清环、σ环、环上测度、可测集等。

注意，当从环上测度予以扩充的时候，主要是抓住了σ可加这个性质。这是研究（函数列的）极限函数的可测性和可积性所必需的。

本章习题可作郑维行、王声望编《实变函数与泛函分析

概要》第一册第二章习题的1、2、4、5、7到13、14 (i)(ii)(iv)、15各题。

四 可测函数

这是研究积分的第二个必要内容。为了讨论积分，要用集$\{x\in E: a\leqslant f(x)<b\}$的测度（$a<b$是任意实数），这就是要研究能使$\{x\in E: a\leqslant f(x)<b\}$可测的函数$f(x)$。这就是可测函数的定义。它可以用简单函数逼近。因此，有许多定理的证明，常从对简单函数的相应定理证起，从而使问题简化。这是常用的一种方法。有的书就是用这作为定义的。

可测函数这一章包括三部分：

（一）基本性质：这里讨论了几种等价的定义，证明了在运算、取绝对值、上、下确界、四则运算之下仍得到可测收敛函数。

数学分析讨论函数列着重在逐点收敛，有时更要求一致收敛性。在实变函数中，对于给定的函数列所讨论的问题，有时既不可能证明也不需要证明它逐点收敛。例如可测函数列的极限函数的可测性就是这样。于是引入了“几乎处处”收敛这一概念。

（二）可测函数列的收敛性：

这一部分讨论函数列的各种收敛性和它们之间的关系。主要介绍“测度收敛”这一概念。在概率论中，它就是依概率的收敛。这是比几乎处处收敛要求更弱一些的一种收敛。但是，有了（存在a.e.收敛的子序列的）黎斯定理，就使得寻求a.e.收敛子序列的要求容易实现。

在学完了积分之后，还可以讨论平均收敛性。

（三）可测函数的构造：

这一章的重点是叶果洛夫定理和黎斯定理。学完这一章后，应掌握判定函数可测的方法和上面所说的两个定理。通过证明再次体会集合论的一些公式的应用。

本章习题可作郑维行、王声望编《实变函数与泛函分析概要》第一册第三章习题的 1 到 6 、8 、9 、11、13、14、15各题。

五 勒贝格积分

L（勒贝格）积分的定义，有多种方法。郑维行、王声望编《实变函数与泛函分析概要》一书采用的是先定义简单函数的积分，然后利用简单函数的积分，来定义非负可测函数的积分和一般可测函数的积分。这种方法，比较简便，但直观性稍差。为了直观，可以参看那汤松著《实变函数论》一书的讲法。

这一章是本课程的中心内容。它包括勒贝格积分的定义、性质、积分序列的极限、勒贝格（L）积分和黎曼（R）积分的比较、傅比尼定理、求原函数等，这些内容都表现了勒贝格积分的优越性。下面分别介绍：

（一）讲了勒贝格测度理论，才能说明黎曼可积函数的范围。就是一个有界函数，当且仅当它的不连续点构成的集是一个零测度集时，才是可积的。

一个有界函数，只要可测就必定L可积。因此，在有界函数中，勒贝格可积的函数比黎曼可积的函数多得多；一个函数，只要黎曼可积，就一定勒贝格可积，并且两种积分的值相同。

（二）无界可测函数的勒贝格积分，实际是只有绝对可积的函数才是可积的（或它的正部和负部分别都勒贝格可积才行）。这一点它比黎曼广义积分要求多些。然而，正因为它有更多的要求，在讨论积分的性质的时候，才能当成非负函数去讨论，从而得到许多方便。

（三）在黎曼积分之下，要判断函数列的极限函数的可积性和求值的时候，经常要假定一致收敛性（还可减弱一些）。然而在勒贝格积分之下，条件要简洁方便的多。在勒贝格积分号下取极限的结论，有三大定理，这就是：

1． 勒维单调收敛定理；

2． 法杜引理；

3． 勒贝格控制收敛定理。

这三个定理是等价的，但以不同的形式出现。定理成立的条件都比较弱，因此使用起来方便。

（四）傅比尼定理：二重积分化成累次积分的问题，黎曼积分除要求二重积分存在外，还要求对于每个 $x\in[a,b]$ 积分 $\int_c^d f(x,y)dy$ 存在，才能得到公式

$$\iint\limits_{\substack{a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d}} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

至于另一累次积分，同样还得假定：对于任何 $y\in[c,d]$，积分 $\int_a^b f(x,y)dx$ 存在。而勒贝格积分只要二重积分存在，就可用二重积分计算。条件限制大大减少，从而使用起来就灵活多了。

（五）囿变函数和微积分基本定理：

囿变函数是很重要的内容。它对讨论微分和积分的关

系、斯蒂杰积分等都极重要，研究曲线求弧长问题也用到它。这里讨论两个问题，一个是囿变函数的性质，一个是函数的微分和积分的关系。贯穿全节，有一个基本工具定理，就是维它利引理。

对囿变函数的讨论，常归为对单调增函数的讨论。凡是涉及单调函数微分的地方，都用了维它利引理。

本章习题可作郑维行、王声望编《实变函数与泛函分析概要》第一册第四章习题的1到5、7到13、22、23各题。

六 自我测试题

1. 证明(1) $(A_1\cup A_2)\ominus(B_1\cup B_2)$
$\subset(A_1\ominus B_1)\cup(A_2\ominus B_2)$。

(2) $(A_1\cap A_2)\ominus(B_1\cap B_2)\subset(A_1\ominus B_1)$
$\cup(A_2\ominus B_2)$，

其中$A\ominus B=(A-B)\cup(B-A)$是二集$A,B$的对称差。

2. 已知可测集序列$E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$满足条件：
$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$：$m,n>N$时，

$$|E_m\ominus E_n|<\varepsilon。$$

试证：存在可测集E，使得$\lim\limits_{n\to\infty}|E\ominus E_n|=0$。
这里$|A|$表A的测度。"$\ominus$"的意义同第一题。

3. 设$f(x)$是$[a,b]$上的有界可测函数，试证：存在简单函数列$\{f_n(x)\}$，一致收敛于$f(x)$。

4. 设$f_n(x)$是一列（实）可测函数，试证

$$\{x;\ \lim_{n\to\infty}f_n(x)存在\}$$

是可测集。

5. 设$E\subset(0,2\pi)$是可测集，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$是任意实

数列。试证

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \cos^2(nt-\xi_n)dt=\frac{1}{2}|E|。$$

6. 试证函数$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ 当$x\in(0,1]$,

$f(0)=0$, 是〔0,1〕上的囿变函数, 而$g(x)=x\sin\frac{1}{x}$,
当$x\in(0,1]$, $g(0)=0$是[0,1]上的有界连续函数, 但不是囿变函数。

7. (1) 设$f_n(x)\in L[a,b]$, $n=1, 2,\cdots$且
$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n(x)-f(x)|=0$, 试证$f_n(x)$依测收敛到$f(x)$。

(2) 设$f_n(x)\in L[a,b]$且满足条件:
$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_n>0$使得当$|h|<\delta_n$时,

$$\int_a^b|f_n(x+h)-f(x)|\,dx<\varepsilon,$$

又存在$f(x)$使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,dx=0,$$

试证, $f(x)$也满足条件:
$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当$|h|<\delta$时,

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\,dx<\varepsilon。$$

8. 试证: 单调收敛定理, 法杜引理和勒贝格控制收敛定理三者可以互推。

近 世 代 数

刘云英

一 概 述

近世代数（或抽象代数）是大学数学专业的基础课之一，它是高等代数课的继续和提高。它主要研究数字、文字和更一般元素的运算规律，研究各种代数系统——群、环、域、格等的结构和特性，提供研究抽象的代数系统的基本方法。

历史上，近世代数学是从十九世纪初发生的，伽罗华应用群的概念，对五次以上代数方程是否可以用根号解的问题进行了研究，并给出完满的解答，可以说他是近世代数学的创始者。从那时候起，近世代数学由萌芽而成长发展。到十九世纪末，群以及和它相联系的不变量概念，在几何上、分析上、理论物理上都产生了重大的影响。自1920年左右起，诺特、阿廷和他们的学生使近世代数学有了突飞猛进的进展。1930年范·德·瓦尔登根据诺特和阿廷的讲稿写成了"近世代数学"一书，第一次以代数系统为主体，综合了近世代数学各个方面的成果，从而成了代数学的划时代的著作。当时，近世代数学的一些基本内容已逐渐成为每个近代数学工作者必备的理论知识，从此，近世代数学在数学领域里的地位发生了变化。二十世纪以来近代数学的发展在相当

大的程度上和代数的发展有关，同时在其他一些科学领域里（如理论物理学、计算机原理等），近世代数学的基础理论也有较直接的应用。

在大学里，近世代数课是高等代数的后继课。因此，一般来说，只要时间安排得开，最好学完高等代数紧接着就学近世代数，否则，至多间隔开一个学期。大学里讲授这门课的时间是54或72学时，自学自然要适当地增加时间。

自学的读者首先要选择好自学课本，已出版的有：

《近世代数基础》，张禾瑞著，1978年，人民教育出版社出版；

《近世代数》，吴品三编，1980年，人民教育出版社出版；

《近世代数》，熊全淹编著，1978年，上海科学技术出版社出版。

近世代数课的内容取舍范围的伸缩性很大，因为它既是数学专业的基础课，又是代数分支的专业基础课。我们建议

近世代数自学时间安排表

单　元	内　　　容	自学时数
一	基本概念	36
二	群	60
三	环和域	48
四	整环里的因子分解	42
五	域的扩张	48

读者用张禾瑞著的《近世代数基础》作课本。这里也按照这本书来谈这门课的主要内容。这门课主要讨论群、环、域三个代数系统的基本理论，大致可分成以下几个单元，为了便于自学的读者合理分配学习时间，同时附上各单元的自学时数表供参考（见第116页下表）。

二 基本概念

这个单元包括张禾瑞著《近世代数基础》或吴品三编《近世代数》的第一章。主要介绍代数里常用到的一些基本概念——集合、映射、代数运算、同态和同构、等价关系和集合的分类等。在高等代数里对集合和映射已初步讨论过，在这门课里又补充了一些必要的内容。关于集合这一部分仅增加了“集合的积（加氏积）”这一概念，它是利用n个集合A_1，A_2，…，A_n构造出的一个新的集合$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i\}$，对今后描述其他概念提供了方便。“映射”的概念给出了一个较一般的定义：假如通过一个法则ϕ，对于$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$中任意一元都有$D$中唯一元和它对应，那么法则$\phi$叫做$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$到$D$的一个映射。可以看出，原先在高等代数里定义的“映射”是$n=1$的特殊情形。

代数运算是一种特殊的映射，最常用的是$A\times A$到A的代数运算，简称A的代数运算或二元运算。由于代数运算可以随意规定，所以不一定有多大意义，但是，那些满足某些运算定律的代数运算却是比较有价值的，通常的运算定律有结合律、交换律、分配律等，读者从小学做算术起对这些运算定律已经运用得非常熟练了。但是，未必考虑过这些运算定

律的重要作用。因此，在学习这一部分内容的时候，要认真体会这一点。

由于近世代数主要研究的对象是有代数运算的集合，因此，讨论的映射也应考虑和代数运算的联系。同态映射就是集合A到集合$\overline{A}$的保持代数运算的一种映射，也就是说，设A有代数运算“$\circ$”，$\overline{A}$有代数运算“$\overline{\circ}$”，如果A到$\overline{A}$的一个映射ϕ满足条件：

$$\phi(a\circ b)=\phi(a)\,\overline{\circ}\,\phi(b)\quad \forall a,b\in A,\ (1)$$

就把ϕ叫做A到$\overline{A}$的一个同态映射。

（条件（1）说明先运算再求ϕ之下的象和先求ϕ之下的象再运算结果相同，通常叫做“ϕ保持运算”。）

特别是同态满射，它是近世代数中一个非常重要的概念，因为可以用它来比较两个集合。如果两个有代数运算的集合A和$\overline{A}$同态，那么它们的和代数运算相关联的性质基本上是一样的。

读者在学习的时候可以细心注意一个同态满射在比较两个集合时候的作用。同构映射是加强了的同态满射，它要求映射是单射，这样一来，可以加强比较两个集合的作用。读者认真罗列同态满射和同构映射所起的作用的异同，这将是有益处的。初学的读者在学习这两个概念的时候，常常抓不住“保持运算”这一条件的涵义。这是正常的，不必着急。读者通过分析一些例子以及在今后几个单元里的反复应用，将会逐步加深对它们的理解。

在高等代数里，为了讨论线性变换的矩阵的标准形，用n阶方阵集合元素间的相似关系把全体n阶方阵分成若干个相似类，为了讨论实二次型的标准形，用n阶实对称矩阵集合

元素间的合同关系把全体 n 阶实对称矩阵分成若干合同类。在近世代数里把这种分类方法抽象为一般理论，就是讨论"等价关系"和"集合分类"间的密切关系。读者在学习的时候只要对照一些熟悉的例子，估计不会有什么困难。

这一单元的内容都是今后学习中将要用到的基本概念，读者学习的时候可能会感到枯燥无味，而且不易掌握，学后觉得似懂非懂。建议读者不妨粗学这一部分，很快进入第二单元的学习，在用到前面的基本概念的时候再返回来学，这样，效果可能会好一些。书上的习题读者要认真做，遇到不会做的题可以留下，但是，等往下学一段以后一定要补上。

三　群

这个单元包括张禾瑞著《近世代数基础》或吴品三编《近世代数》的第二章。群论是抽象代数的一个重要分支，也是一个较古老的分支，它的应用是极广泛的。在近世代数这门基础课里，仅介绍群论的基础知识，有兴趣的读者在学完这门课以后，可以继续学习群论这门专业课。这里讲的主要内容有群的定义和基本性质、群的同态和同构、几种重要类型的群、子群和子群的陪集、不变子群和商群、同态基本定理。

群是只有一个代数运算的代数系统，通常把群的代数运算叫乘法。群的定义比较常见的有两种。有限群可以用消去律来刻划，采用这个定义用起来要方便些。证明群的两种定义的等价性的方法，和群的基本性质（如单位元的唯一性、群的任意元的逆元的唯一性）的推导方法是代数里的基本论

证方法。就是从定义出发经过严格的逻辑论证，并不需要有什么特殊技巧得出结论。读者要认真领会掌握，并且注意在推导过程中得到的一些有用的结果是今后经常用到的，例如，一个左逆元一定也是一个右逆元；一个左单位元一定也是一个右单位元等。有时候，需要把群的代数运算叫做加法，相应地把群的单位元叫做零元，把群的任意元的逆元叫做负元。读者必须适应这种仅是符号（或名称）的改变。群的元素 a 的阶（周期）是一个重要概念，借助于这个概念可以讨论群的某些性质。

群的同态和同构是同态和同构这两个概念在群上的应用。读者在学习这一部分内容的时候，一方面可以复习和巩固前一单元的有关内容，另一方面要总结同态映射和同构映射都能保持群的哪些性质，并注意它们的异同。

变换群是我们讨论的第一种具体的群。变换群在数学上，特别是在几何上，应用很多。这里讨论变换群的主要作用是凯莱定理给出的，就是任何一个群都和一个变换群同构。任何一个抽象群都可以在变换群里找到具体的实例，由此可知任何一种群都是存在的。凯莱定理给出的结果在理论上价值较大。把这个结果应用到交换群的一种特殊类型——置换群上，就可以得到任何一个有限群都和一个置换群同构。而置换群又是一种比较容易计算的群，因此，在置换群中找有限群的例子是比较方便的。上面所谈是这一部分的中心内容，读者要很好地领会。同时，读者必须熟练掌握 n 次置换的乘法规则。要注意各种课本的规定有差异，就是有从左到右乘的，也有从右到左乘的，主要是看“变换的合成”是怎样规定的，读者切不可乱乘一气。n 次置换的基本性质

以及把一个 n 次置换写成不相交的循环置换的积都是必须熟习的基本知识，今后要经常用到。

我们研究每一种群，希望解决三大问题，就是存在问题、数量问题、构造问题。对于循环群来说，这几个问题都圆满地解决了。学习循环群这部分内容的时候，读者要抓住这几个问题的研究方法进行思考，因为这些问题的研究是近世代数里研究一个代数系统的缩影。想一想，为什么对变换群和置换群来说就没有解决？

利用一个群的子集来推测整个群的性质是群论中的基本方法。因此，读者必须熟记一个群的非空子集作成子群的条件；探讨一个群 G 的子群 H 能继承 G 的哪些性质（比如 H 的单位元就是 G 的单位元；循环群的子群仍是循环群等）。还要掌握找出子群的一般方法。利用群 G 的一个子群 H 来作 G 的分类是"等价关系和集合分类"的论述结果在群上的应用，从而得出子群的陪集这一重要概念。初学者在学习这一部分内容的时候会感到抽象，对"左陪集"（或右陪集）究竟是什么，搞不清楚。最有效的解决办法是通过研究例子加深对概念的理解，除去书上所举的典型例题外，自己再动手做几个例子，反复推敲，必见成效。利用群 G 的不变子群 N 作出 G 的陪集集合可以构造出一个新的群 G/N，就是 G 关于 N 的商群。由商群 G/N 可以推测 G 的性质，这正是讨论不变子群和商群的主要目的。读者在学习不变子群、商群和同态基本定理的时候，可以按这目的先粗略读一下，然后再返回来认真钻研有关概念和一些重要定理。这些内容虽然对初学者来说是比较难的，但是，在群论上却是非常重要的，读者应给予充分的重视。

四 环 和 域

这个单元包括张禾瑞著《近世代数基础》第三章或吴品三编《近世代数》第三章第1-5节。主要介绍环和域的基本概念和性质，以及几种最重要的环和域。

环是有两种代数运算的代数系统，通常把环的代数运算叫加法和乘法。可以对比整数环来学习环的定义和基本性质，但是，要注意环的代数运算所满足的运算定律和数的运算不完全一样，因此就会出现差异。比如环里可能有零因子，环的乘法可能不满足交换律，环的定义条件外再附加一些条件就出现交换环、无零因子环、有单位元环、整环、除环、域等各类环。注意整环的定义现在流行的有不同的两种：一是如张禾瑞著《近世代数基础》一书里定义的无零因子有单位元的交换环；另一是如吴品三编《近世代数》一书里定义的无零因子的交换环。两种都可采用，要注意选定后就用到底。在学习各种带附加条件的环的时候，最好同时记住一些例子作为背景，这样就不至于混淆不清了。多项式环是我们重点讨论的一种特殊的环。主要解决一个有单位元的交换环R上的未定元x的多项式环$R[x]$的存在问题。初步体会一下从理论上解决存在性问题的一种方法。

环的理想在环论里的地位和不变子群在群论里的地位类似，读者除了要熟习理想概念和它的重要的基本性质外，着重领会一下理想的作用，也就是可以利用环R的理想$\mathfrak{A}$构造一个新环$R/\mathfrak{A}$——环R的模$\mathfrak{A}$的剩余类环（商环）。学习的时候可以和群论中的相应内容作个比较。

给了一个有单位元的可换环R，$\mathfrak{A}$是R的理想。探讨一

下哪些理想$\mathfrak{A}$，能使$R/\mathfrak{A}$是一个域？结论是：$R/\mathfrak{A}$是一个域的充分必要条件是$\mathfrak{A}$是R的最大理想。这一结论很重要。它告诉我们利用R的最大理想$\mathfrak{A}$可以造出一个新的域$R/\mathfrak{A}$。这是由一个有单位元的交换环得到一个域的重要方法。给了一个无零因子的交换环R，仿照由整数环构造有理数域的方法可以得到一个域Q，而且使R是Q的子环，这又是一种由环得到域的方法。这种构造新代数系统的方法是近世代数里常用的方法，读者应逐渐习惯这种方法。

无零因子环的特征（数），是一个非常重要的概念，它对讨论域的构造起决定性作用。由于在普通数的计算里不会出现若干个非零元相加是零的现象，所以初学者会感到捉摸不透。先承认在某些环里这种现象确实存在，将来用多了就会理解的。

五 整环里的因子分解

这一单元包括张禾瑞著《近世代数基础》第四章或吴品三编《近世代数》第三章第6节和第7节。通过这一单元的学习读者可以体会从不同的具体研究对象的性质怎样抽象出它们的共性，从而上升为一般理论，反回来用在其他具体研究对象上。从开始讨论整除、素元、单位、相伴元、真因子等概念和它们的简单性质的时候，就可以对照着整数或多项式类似的概念和性质来领会这一精神。直到学习唯一分解环的定义和性质的时候，可以看出这些理论正是整数环或多项式环中整除性理论和唯一分解定理的推广。

由于判断一个整环是不是唯一分解环是比较困难的，所以介绍两种重要类型的唯一分解环。一种是主理想整环，另

一种是欧氏环。事实上欧氏环是特殊的一种主理想整环。由于它本身在其他方面的作用而把它专门列为一种。

讨论唯一分解环上的多项式环的作用有二：一是给出一个唯一分解环不是主理想整环的例子，就是整数环是一个唯一分解环，但不是主理想整环；更主要的作用在于证明一个唯一分解环 I 上的多元多项式环 $I[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是一个唯一分解环。特别是在讨论过程中引入的本原多项式这个概念和它的基本性质在今后学习中是很有用处的。以前在高等代数里判断整系数多项式在整数环上是否可约的时候曾应用过这一概念。

六 域的扩张

这一单元包括张禾瑞著《近世代数基础》第五章或吴品三编《近世代数》第三章第 8 节。主要介绍单扩域、代数扩域、多项式的分裂域、有限域和可离扩域等。这些内容是域论的基础理论，为进一步研究域论作个准备，同时，学习这一单元也可以达到复习巩固前面所学基础知识的目的。

由于任意域都可以看成它的子域的扩域，它可以由子域添加若干元而得到，所以研究域的构造可以由子域的添加入手，也就是从一个给定的域 F 出发，来研究它的所有由添加得到的域。首先要搞清楚：什么是添加域 F 的扩域的子集 S 在域 F 所得的扩域 $F(S)$？$F(S)$ 包含哪些元素？特别地，当 $S=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 的时候，$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = F(\alpha_1)F(\alpha_2)\cdots F(\alpha_n)$ 是怎样推导得出的？

单扩域 $F(\alpha)$ 是最简单的扩域。由 α 是 F 上的代数元或超越元，单扩域 $F(\alpha)$ 可分做单代数扩域和单超越扩域两种。

它们的构造是完全清楚的，就是如果α是F上的代数元，那么$F(\alpha)\cong F[x]/(p(x))$，其中$p(x)$是$F[x]$的一个唯一确定的最高系数是1的不可约多项式，并且$p(\alpha)=0$，如果$\alpha$是$F$上的超越元，那么$F(\alpha)\cong F[x]$的商域。

给了域F，F的单扩域的存在问题也圆满地解决了。就同构意义来说，F的单超越扩域是唯一的；F的单代数扩域$F(\alpha)$也是唯一的，其中α的极小多项式是$F[x]$给定的最高系数是1的不可约多项式。由此看来域F的单扩域的构造、存在、数量三大问题都解决了，这确实是不容易的。

代数扩域和有限扩域是两种很重要的扩域。由于域F的有限扩域一定是F的代数扩域，所以研究代数扩域的构造等问题就显得更重要。但是，代数扩域的构造问题讨论起来不象单扩域那么简单。所涉及的内容已超出本基础课的范围，因此就不作讨论了。这一单元里有关有限扩域和代数扩域的一些定理是些常用到的基本事实，论证的方法是代数里的基本方法，读者不可忽视。

学习多项式的分裂域的时候，读者抓住分裂域的存在问题、唯一性问题以及分裂域怎样起到代替代数基本定理这三个问题进行探讨，就可以基本掌握这种类型的域。

有限域又叫做伽罗华域，是一种重要类型的域。它的应用很广泛。有限域的元数一定是p^n个，其中p是一个素数。这是一个基本事实。元数是$q=p^n$的有限域的构造、存在和唯一性等问题都得到了解决。并且有重要结果：有限域是它的素域的一个单扩域。

可离扩域是一种特殊的代数扩域，在这里也不去研究它的构造，而仅证明有限可离扩域是单扩域。由于对单扩域的

构造是清楚的，因此特殊的有限可离扩域的构造就解决了。

在这一单元里仅就一些简单的扩域如单扩域、多项式的分裂域进行了详细的讨论，由此可以稍为体会到讨论扩域的方法。有兴趣的读者不妨找一本有关域论的专门书作深入一步的学习。

七 自我测试题

1. 设 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&3&1&6&2\end{pmatrix}$,

$$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&6&1&2&3\end{pmatrix},$$

求$\sigma\tau$，σ^{-1}，τ^{-1}，并把$\sigma\tau$写成不相连的循环的积，σ，τ，$\sigma\tau$的阶各是什么？

2. 设C是复数集，R^{+}是非负实数集。证明：f：$z\to|z|$（复数z的模）是C到R^{+}的一个满射；试给出由f决定的C的等价关系"$\sim$"，并写出商集$C/\sim$。

3. 设H是群G的任一子群。证明：H的任意右陪集中元素的逆元组成H的一个左陪集。

4. 求出A_4的所有子群，并指出哪些是正规子群。

5. 设H，K是群G的两个不变子群，且$H\cap K=\{e\}$（e是G的单位元）。证明：G和$G/H\times G/K$的一个子群同构。

6. 设G是一个群，a，$b\in G$，且满足条件：$a^2=e$，$b^3=e$（e是G的单位元），$aba=b^2$。求由a，b生成的G的子群H，并证明：H和S_3同构。

7．设F是一个域，R是实数域。φ是F到R的映射满足以下条件：

（1）$\varphi(0)=0$，$\varphi(a)>0$，$\forall a\neq 0$，$a\in F$；

（2）$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$，$\forall a, b\in F$；

（3）$\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)$，$\varphi(b)$中较大者，$\forall a, b\in F$。

令$D=\{a \mid a\in F, \varphi(a)\leqslant 1\}$，

$M=\{a \mid a\in F, \varphi(a)<1\}$，

证明：（1）$\varphi(1)=\varphi(-1)=1$；$\varphi(a)=\varphi(-a)$；如果$a\neq 0$，那么$\varphi(a^{-1})=\varphi(a)^{-1}$。

（2）D是F的一个子环。

（3）M是D的一个理想。

（4）判断一下，M是不是D的最大理想，从而说明D/M是不是域。

8．设环R和$\overline{R}$同态，$R\sim\overline{R}$，

（1）$\overline{\mathfrak{A}}_1$是$\overline{R}$的理想，$\mathfrak{A}_1=\varphi^{-1}(\overline{\mathfrak{A}}_1)$，证明：$R/\mathfrak{A}_1\cong\overline{R}/\overline{\mathfrak{A}}_1$。

（2）$\mathfrak{A}_1$是R的理想，$\overline{\mathfrak{A}}_1=\varphi(\mathfrak{A}_1)$，问$R/a_1$是否一定和$\overline{R}/\overline{\mathfrak{A}}_1$同构？

9．R是有单位元的可换环，$p\in R$，a，$b\in R$，证明：$R/(p)$是整环的充分必要条件是如果$p\mid ab$，那么$p\mid a$或$p\mid b$。

10．如果R是主理想整环，a，$b\in R$，证明：a，b互素的充分必要条件是：存在m，$n\in R$使得$am+bn=1$。（1是R的单位元。）

11. (1) $f(x)=x^2+2$, $g(x)=x^4-x^2-2$,
求$f(x)$，$g(x)$在有理数域Q上的分裂域E_1和E_2。并求$(E_1:Q)=?$ $(E_2:Q)=?$

(2) 证明：$Q(\sqrt{2}+i)=Q(\sqrt{2}, i)$。

(3) 求$\sqrt{2}+i$在Q上的极小多项式。

高等几何

陈绍菱

一 概 述

高等几何这门学科有不同的涵义，有些高等几何教材包括几何基础和射影几何，有些教材却仅仅包含射影几何。近年来，由于拓扑学的发展，有些国家的高等几何教材就包含射影几何和拓扑学引论。

按照高等师范院校教学大纲的要求，本课主要讲授平面射影几何，而且以仿射几何为辅。

早自欧洲文艺复兴时期，由于绘图和建筑等的需要，透视画的理论逐步形成，以后便建立了画法几何。法国数学家蒙日在1768到1799年之间和1809年分别出版了画法几何和微分几何两部经典著作，由于画法几何理论的发展，他的学生彭色列继承了这两部著作中的综合思想，于1822年写了一本书，它是射影几何方面最早的专著。继彭色列之后，法国人沙尔和出生于瑞士的德国数学家史坦纳改进了射影几何的研究工具，并且把它们应用到各种几何领域，因而得到了丰硕的成果。到了十九世纪末期，英国人凯莱和德国人克莱因等人用变换群的方法研究了这个分支，射影几何便成为完整独立的学科。如果说射影几何开始所研究的问题是大量的个别

情形的话，那么到后来，它的主要意义就在于它把各种几何用变换群的概念联系统一起来，特别是欧几里得几何也可用射影观点理解为射影几何的一部分。

学习射影几何一般有三种方法：第一种是代数法，就是以线性代数作工具进行研究；第二种是综合法，就是在初等几何基础上进行研究；第三种是公理法，它以一组公理作基础进行推演。按照教学计划的要求，本课程兼用代数法和综合法，而以代数法为主，因此本课程也可以叫做射影解析几何或高等解析几何。但是注意到本课程既以代数计算作工具来研究图形的性质，因此尽力避免冗长计算，而重视几何意义。

学习本课程可加深对初等几何和解析几何的理论和方法的理解，从而可以获得在较高的观点下来处理初等几何和解析几何问题的能力。本课程也是画法几何的理论基础。在图算法所作算图的变形以及航空摄影中都有它的应用。

本课程主要是在实数域上讨论一次问题和二次问题。如果把实数域扩充到其他代数体系上而进行研究，就是线性几何。另一方面研究任意代数体系上的高次形象，就是代数簇，它是代数几何所研究的对象。因此本课程可以看作是近代几何的一个分支——代数几何的基础。

自学本课程的读者应在初等几何、解析几何和高等代数的基础上来继续学习。在高等师范院校本课程一般安排在第二学年第二学期或第三学年第一学期，讲授54学时，由于自学的条件不同，读者可以适当增加时数。

关于课本，现在已出版的高等几何并不很多，为了帮助读者选择，现在介绍下列几种作为课本和参考书。课本是：

《高等几何》，刘增贤、林向岩编，人民教育出版社正在排印。这本书根据高等师范院校1980年高等几何教学大纲来编写，内容专讲平面部分，比较精练，配备有相当数量的例题和习题。

另外再选两种参考书：

《近世几何学》，孙泽瀛编，1959年，高等教育出版社出版。这本书内容丰富，不但讲平面部分而且还讲立体部分。

《高等几何讲义》，苏步青编，1964年，上海科学技术出版社出版。这本书平面、立体两部分混写，非常简练。

选定课本后，就可以制定比较细的学习计划，包括划分单元和自学时间的分配。建议自学者参照下表自行安排：

高等几何自学时间安排表

单元	内容	学时
一	平面仿射几何的基本概念，《高等几何》第一章	24
二	平面射影几何的基本概念，《高等几何》第二章和第三章	50
三	变换群和几何学，《高等几何》第四章	18
四	二次曲线的射影理论、仿射理论和度量理论，《高等几何》第五章和第六章	70
五	射影几何公理基础，《高等几何》第七章	20
六	非欧几里得几何概要，《高等几何》第八章	18

要注意下列各点：

第一，在自学每节后要写小结并作一定数目的习题（由易到难）。在自学每章后要写本章总结，并作一定数目的综合习题。

第二，在学完全书后进行总复习，最后作自我测验题。

第三，关于第五和第六两个单元可作为选学内容。

二　平面仿射几何的基本概念

本单元是在欧几里得几何的基础上介绍平面仿射几何的基本概念，而且把它看作是从欧几里得几何过渡到射影几何的桥梁。作为一门学科来说总有它的研究对象，为了说明仿射几何研究的对象，先从欧氏几何说起，欧氏几何所研究图形的性质和图形的特定位置无关，例如长度、角度和面积等等。所谓"和图形的特定位置无关"，是指一个图形允许在它所处的空间里任意运动。因运动的地点不同，于是一个图形产生了许多其他地点的图形。这些图形由于是同一图形经过运动而产生的，我们把它们当做是不同地点的同一图形。欧氏几何就是研究这些不同地点的同一图形的性质的，而运动就是本单元所学习的正交变换，所以我们说欧氏几何就是研究正交变换下的不变问题。还有许多其他变换，例如图形在太阳光线之下得到的像可以说它是由平行射影得到的。这种平行射影组成了本单元所学习的仿射变换。仿射几何就是研究仿射变换下的不变问题。这里专门讨论平面仿射几何。如果把仿射变换的代数表示加以推广，非常容易推出高维仿射空间和高维仿射几何，这里就不作介绍了。

本单元共分四个部分，现在分述如下：

（一）基本形[①]：这一部分是后面常用到的一些知识，为了区分和比较两个无穷集合，我们先引进维数的概念。

在几何学里通常利用某集合中元素的坐标或参数（指独立参数）所成的代数表示来说明这个性质。例如平面上点集合中的每一点，可以由两个坐标（x，y）或两个参数唯一决定。又如平面上抛物线集合中的每一条抛物线由四个参数来唯一决定。这是因为平面上抛物线的一般方程含有四个参数的缘故。

定义 决定无穷集合中一个元素所需参数的最小个数叫做这个集合的维数或自由度。

这样平面上点集合的维数是二，抛物线集合的维数是四。为了以后运用方便起见，把几何中元素点、直线、平面所成的某些无穷集合叫做基本形。按照维数的概念可以把基本形分成四大类：

1. 一维基本形：内容有点列：在一直线上所有点的集合叫做点列，这条直线叫做底；线束：在一平面里经过一点所有直线的集合叫做线束，这个点叫做顶点或中心；面束：经过一直线所有平面的集合叫做面束，这条直线叫做轴线。

2. 二维基本形：内容有点场：在一平面里所有点的集合叫做点场或点域，这个平面叫做底；线丛：空间里经过一点所有直线的集合叫做线丛或线把，这个点叫做顶点或中心；线场：在一平面里所有直线的集合叫做线场或线域，这个平面叫做底；面丛：经过空间一点的所有平面的集合叫做面丛，这个点叫做顶点或中心。

---

①《高等几何》一书叙述比较简略，这里酌加补充。

3． 三维基本形：内容有点空间：空间里所有点的集合叫做点空间；面空间：空间里所有平面的集合叫做面空间。

4． 四维基本形：内容有线空间：空间里所有直线的集合叫做线空间。

射影几何就是对这些基本形进行研究。

（二）点变换：首先引进两个集合的一一对应以及一个集合到自身的一一变换的概念。重点是一一变换的一些性质和乘积运算。

特别值得注意的是全书大部分篇幅都研究点集合到它自身的一一变换，叫做点变换，这和解析几何里的坐标变换是不同的，在那里指的是坐标轴的变换，而不是点的变换。

（三）正交变换：这一部分有四个要点。

1． 三类特殊的点变换——平移变换、旋转变换、轴反射变换。

注意它们的代数表示都属于下列形式：

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{cases}$$

其中
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \pm 1。$$

2． 正交变换定义中的距离常是正数。从定义容易看出上面三种特殊的点变换都是正交变换，同时也可以看出它们间的区别。由定义也可以推出一些简单性质。最后推出正交变换的代数表示是

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - \varepsilon y\sin\theta + a_{13}, \\ y' = x\sin\theta + \varepsilon y\cos\theta + a_{23}, \end{cases}$$

其中$\varepsilon = \pm 1$，注意它也可用矩阵表示。

正交变换共分两种：一种正交变换是$\varepsilon=1$，这时候，$\Delta=1$。它可以分解成为平移或旋转或旋转和平移的积。另一种正交变换是$\varepsilon=-1$，这时候，$\Delta=-1$。它可以分解成为轴反射或轴反射和前一种正交变换的积。

3．图形的正交不变问题：两点距离经正交变换不变，是不变量，又点和直线仍分别变成点和直线，所以同素性是不变性。

4．线性变换的两种几何意义：一种是解析几何中的坐标轴的变换，另一种是现在所学习的点变换——正交变换。

（四）仿射变换：这一部分有七个要点。

1．已知两相交（或平行）平面和一方向，利用这个方向经过平行射影所建立的两平面间点的一一对应，叫做透视仿射对应。

2．设有π_1，π_2，…，$\pi_{n+1}(n+1)$个平面，且π_i，π_{i+1}（$i=1$，…，n）两个平面间建立透视仿射对应，那么形成一个透视仿射对应链，在这个链中π_1，π_{n+1}这两个平面的一一对应叫仿射对应。如果π_1和π_{n+1}恰相重合，就得π_1到自身的仿射变换。值得注意的是仿射变换也是一种点变换。

3．从透视仿射对应的不变性（同素性、结合性、平行性）和不变量（单比）转到仿射变换的不变性和不变量。

4．平面仿射坐标系：自笛卡儿斜坐标系坐标三角形（等腰三角形）经仿射对应得到任意三角形而建立平面仿射坐标系。平面仿射坐标系和笛卡儿斜坐标系的不同点在于两个轴上单位线段不能合同（叠合）。

5．仿射对应的代数表示：要从两面证明它是非奇线性对应，

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2, \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0。$$

应该特别注意非奇异性质由 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 来表示，当 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ 的时候，也就是奇异情况下，那么无逆，而将不是一一对应。

6．图形的仿射不变问题：这一部分内容是完全用代数法证明的，值得注意的是圆的仿射对应图形是椭圆。另外利用等边三角形、正方形和圆的一些仿射性质，可以推出任意三角形、平行四边形和椭圆的相应性质。

7．仿射变换的特例：仿射变换是最一般的非奇线性变换。过去所学的正交变换、位似变换和相似变换都是它的特例，一些实际上应用的变换也常常是仿射变换的特例。

三　平面射影几何的基本概念

前一单元曾介绍正交变换和仿射变换两种点变换，这里再介绍另一种变换。把图形放在灯光的前面而投射到墙壁上得到另一图形，也可以说所得的像由中心射影得出。利用中心射影就得出本单元将要学习的射影变换。射影几何就是研究射影变换下的不变问题。这里也只研究平面射影几何。对于高维射影空间和高维射影几何这里不作要求。

这单元共分两大部分：

（一）射影平面的结构：这部分从两个角度阐明射影直

线和射影平面的形成：一个是从欧几里得直线和欧几里得平面补上无穷远元素，扩充成射影直线和射影平面，然后用综合法去研究；另一个是由欧几里得的笛卡儿坐标推广成齐次坐标而形成，然后利用代数法进行研究。特别提出射影平面上具有一个独特的性质——对偶原则。最后把实射影平面扩充到复射影平面。这一部分有九个要点。

1．射影平面的第一种建立法——无穷远元素的引入：从欧几里得直线（平面）到仿射直线（平面）再到射影直线（平面），注意每一种的特征。

2．透视对应和射影性质：注意透视对应和透视仿射对应的异同。同素性、结合性是射影性质，而平行性却不是，又简比也不是射影不变量。

3．笛沙格透视定理：这在射影几何公理体系中起重要作用，另外，它也是一个重要的射影性质。

4．射影平面的第二种建立法——齐次点坐标的引入：把三维欧几里得空间中（除去原点）的点（x_1，x_2，x_3）和（λx_1，λx_2，λx_3）（$\lambda \neq 0$）看作同一点，那么这些点的集合叫射影平面。由这里可以推广到高维射影空间。

5．齐次点坐标的应用：先引进直线的齐次点坐标方程，然后对点、线的结合问题进行研究。

6．线坐标：分齐次和非齐次两种，注意哪些元素没有坐标或方程。

7．对偶原则：由于射影平面的特殊结构而具有的独特性质。

8．代数对偶：在已知坐标系下，点和直线的坐标或方程叫做基本代数对偶，然后就可得到点和直线的一些几何性

质的代数对偶。

9. 复元素：利用坐标把实射影平面扩充到复射影平面，这时候也有代数对偶。特别注意共轭复元素和它的特性。

（二）射影变换：这部分要注意射影变换下的不变问题。它和仿射变换有关部分是可互相对照的。这一部分有五个要点。

1. 交比和调和比：从单比引入交比，它是射影基本不变量。它包括：四共线点的交比和调和比，四共点线的交比和调和比。

2. 两个一维基本形的射影对应：有四点应该注意。两个一维基本形的透视对应(注意$\overline{\wedge}$的使用)；两个一维基本形的射影对应（注意$\overline{\wedge}$的使用），特殊时候就得到一个一维基本形到自身的射影变换；两个同类一维基本形的射影对应和透视对应的关系；射影对应的代数表示，包括

非齐次坐标：
$$x'=\frac{a_{11}x+a_{12}}{a_{21}x+a_{22}},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0。$$

齐次坐标：
$$\begin{cases} \rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2, \end{cases}$$

$$\rho\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

注意ρ随点的齐次坐标的比例常数而变。又

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

的时候，将不是一一对应。

3．一维基本形的射影变换：

值得注意的是点列的射影变换的代数表示，是在同一个坐标系下考虑的。包括：不变元素的种类；特殊的射影变换——对合。

4．两个二维基本形的射影对应（射影变换）：

这里主要研究点场到点场的射影对应，为了方便，采取了和以前不同的方法。首先从代数表示出发研究非奇线性对应，然后再证明它和射影对应是等价的。

5．射影坐标系：这里用射影不变量（交比）来规定射影坐标。包括一维射影坐标系和二维射影坐标系。

一维射影坐标系：在有向直线上取两个基点，一个是原点，一个是单位点，就可以建立笛卡儿坐标系。又在射影直线上取三个基点，就可以建立非齐次射影坐标，然后转到齐次射影坐标，而笛卡儿坐标、仿射坐标都是它的特例。这里有两方面值得注意：一是射影直线上，笛卡儿坐标和射影坐标的坐标变换以及两种射影坐标的坐标变换都是非奇线性变换。二是点列到点列的射影对应用射影坐标表示也是非奇线性对应。

二维射影坐标系：把利用简比建立平面仿射坐标的思想加以推广而利用交比建立平面（非齐次）射影坐标，再转到齐次射影坐标，笛卡儿坐标、仿射坐标，都是它的特例。

四　变换群和几何学

本单元主要介绍几何学的群论观点，这是几何发展史上一个重要的里程碑。

本单元共分三个细目：

（一）变换群：一个集合给定一个运算（叫乘法），一般如果适合四条公理就可以成一个代数体系——群。特殊情况下，对于（一一）变换集合给定乘法运算后，适合两条公理（封闭、可逆）就成群，这个群叫变换群。

对于四个重要变换群，要注意它们的维数和彼此间的从属关系。

（二）变换群和相应的几何学：这一部分有三方面内容。

1． 运动群对应于欧几里得几何，主要思想是对集合赋予其中元素一个等价概念，如形成一个等价关系，必定能够把这个集合分成等价类。

2． 一个变换群对应一种几何，这种几何所研究的对象就是它所对应的变换群下的不变量和不变性。

3． 几何学群论原则和它在数学发展史上所起的作用。

（三）三种几何学的比较：注意三种变换群的隶属关系和所对应几何的内容多少的不同，更须注意三种几何所研究对象的关系。

五　二次曲线的射影理论
仿射理论和度量理论

本单元研究二次形象。它是在射影平面上分别用代数法和几何法来建立的。接着讨论二次曲线的射影性质，然后由射影平面转到仿射平面和欧几里得平面，分别研究二次曲线的仿射性质和度量性质，从而可以清楚地理解二次曲线的仿射性质和度量性质的理论基础，再一次体会三种几何的区别

和内涵。

本单元共分三个细目：

（一）二次曲线的射影理论：这一部分有四个要点。

1. 二次曲线的代数方程和射影建立：利用平面上的两个同类一维基本形的射影对应就可建立，以后常用这方法来判断是否是二次形象的问题。要注意二阶曲线和二级曲线的对偶性。

2. 二次曲线的性质：关于二次曲线和直线的相关位置，可用二次方程

$$S_{qq}\lambda^2+2S_{pq}\lambda+S_{pp}=0$$

的判别式来判定，其中 $S_{pq}=\sum_{i,j}^{1-3}a_{ij}p_iq_j$ 由方程

$$\sum_{i,j}^{1-3}a_{ij}x_ix_j=0$$

得出。切线的推求，利用上列二次方程得$S_{qq}=0$。关于二阶曲线和二级曲线的关系——马克劳林定理，这个性质仅限于二次形象，三次以上形象都不成立。关于两个著名的对偶定理——帕斯卡定理和布利安雄定理，以上是一次形象和二次形象的结合问题，利用一维基本形的射影对应和透视对应的关系就可证明。

3. 配极理论：关于二阶曲线的极点和极线，可以利用上面的二次方程来推出。

关于配极图形，二阶曲线的极点和极线是对偶元素，所产生的对偶图形就是配极图形，从历史上看对偶原则恰是从这里抽象得来。

关于配极变换，从历史上看，一般的点线变换正是从这里的配极变换抽象得出的。

4． 二阶曲线的射影分类：如同解析几何二次曲线分类一样，也有两种方法：一种是选取新系法，主要选取适当的自配极三点形作为新的坐标三点形而建立新的射影坐标系。这可以把二阶曲线分成五个射影类，同类的射影等价，异类的却不等价。另一种是不变量法，计算二次曲线系数方阵的秩和符号差就行。

（二）二次曲线的仿射理论：在射影平面里，取一条特定直线叫无穷远线。把二阶曲线就无穷远线进行研究就得它的仿射性质。

应当注意的是射影性质有对偶，而仿射性质却没有。在有穷部分所得的一些结论和解析几何所论完全相同。这部分有五个要点。

1． 三个类型曲线和三种曲线：前者用 $A_{33}\gtreqless 0$ 来判定，后者是利用 $A_3\gtreqless 0$，$|a_{ij}|\neq 0$ 或利用二阶曲线和无穷远线交点的个数来判定。

2． 中心：利用极点、极线来规定，可求得三种曲线的中心。

3． 直径和共轭直径：利用极点、极线和共轭直线分别来规定。注意这里只能推求它们的位置，而不能研究它们的度量性质。

4． 渐近线：利用切线来规定，注意它和中心以及一对共轭直径的关系。

5． 二阶曲线的仿射分类：在欧几里得平面上分成九类，这和解析几何所论完全相同，在仿射平面上却分成十一类。

（三）二次曲线的度量理论：在仿射平面内的无穷远线上取一对共轭虚点（1，±i，0），叫圆点。再就这一对点加以研究就得二阶曲线的度量性质。这一部分有三个要点。

1．圆点和迷向直线：要注意三点，一是二次曲线是圆或等轴双曲线的特征；二是迷向直线的距离特征；三是由拉盖儿定理说明利用交比可表达角和垂直两个度量概念。

2．主轴和顶点：抛物线的主轴是它上面无穷远点关于两个圆点的调和共轭点的极线，顶点个数唯一。除圆以外的有心二阶曲线只有一对主轴，它和两条渐近线成调和线束，顶点个数是四。

3．焦点和准线：抛物线仅有一个实焦点和一条准线，焦点在主轴上。非圆的有心二阶曲线有四个焦点和四条准线，它们分别是两实两虚。

六 射影几何公理基础

公元前三世纪希腊数学家欧几里得把前人的方法、理论用一套公理来整理，写成《几何原本》一书，它支配了近两千年的几何。以后由于罗巴切夫斯基几何和其他数学分支的出现，几何基础得以建立。给定一组不定义的元素和关系，并且以一组公理来制约，然后展开逻辑推理，就得一种几何。这种建立几何的方法叫做近代公理法，以别于欧几里得的《几何原本》所采用的公理法，那种方法叫做古典公理法。本单元有三个要点。

1．射影几何公理体系。

2．公理体系的三个基本问题：主要用模型法来讨论。

3．射影几何公理体系的和谐性。

七　非欧几里得几何概要

在变换群和几何的观点下简单地介绍两种非欧几里得几何，然后在射影平面里作出罗巴切夫斯基几何的克莱因-凯莱模型。本单元有三个要点。

1．射影测度：把欧几里得几何的距离和角度的表达式转换到非欧几里得几何。

2．由自同构群引进射影群的两个子群，就对应两种非欧几里得几何。

3．罗巴切夫斯基几何的一种模型：这部分内容在学过几何基础或罗巴切夫斯基几何后，才能看懂。

八　自我测试题

1．判定下列图形或性质属于欧几里得几何、仿射几何或射影几何中的哪一种（要最大的），以E，A，P分别表示。如果属于P，试写出它的对偶。如果属于A或E，怎样用射影观点来解释？

（1）等轴双曲线；（2）平行；（3）点列到自身的射影变换；（4）垂直；（5）布利安雄六线形；（6）线段的中点；（7）角度；（8）二阶曲线的配极原则；（9）二阶曲线的焦点；（10）二阶曲线的准线。

2．怎样用射影群说明它对应着射影几何？为什么说仿射几何的内容比射影几何的内容丰富？并举例说明。

3．已知二级曲线

$$u_2u_3+u_3u_1+u_1u_2=0,$$

（1）求它所对应的二阶曲线，并判定它属于哪一个射

影类，然后再判定属于哪一个仿射类；

（2）求它的中心；

（3）求它的渐近线。

4. 试证明：一条定直线上的点关于两个常态二阶曲线的极线的交点集合是一个二阶曲线。写出它的对偶命题。

5. 在笛卡儿直角坐标系下，已知一条双曲线的方程

$$3x^2-4xy+8x-1=0,$$

试利用射影观点，求

（1）渐近线方程；

（2）斜率是1的直径和对应的共轭直径的方程。

微分几何

陈绍菱

一　概　述

当解析几何正在发展的时候，微分几何这门学科也就开始建立了，而且这两门学科的发展是交织在一起的。微分几何在很大程度上可以说是微积分的自然产物。对这门学科第一个有重要贡献的人是瑞士数学家欧勒，他对平面曲线和曲面都有许多研究成果。其次是法国数学家蒙日，他在1809年出版了他写的关于微分几何的著作，书名叫做《分析在几何学上的应用》，它是这个学科的第一本专著。微分几何是在解析几何的基础上以数学分析作工具研究空间形式的另一门几何课，它不但能指导欧几里得解析几何，而且也是近代几何的重要分支——近代微分几何的基础；另一方面，在许多工程技术方面有广泛的应用。

经典微分几何主要讨论三维欧几里得空间光滑曲线和曲面的局部性质，也就是研究曲线和曲面在一点邻域的性质。随着各学科的发展，微分几何也从局部（小范围）转到整体（大范围）的研究，三十年代整体微分几何开始迅速发展，到了六十年代，它和微分方程、代数、拓扑等学科相互渗透，特别是和分析这一学科相结合，形成了一个新的数学分

支——大范围分析。

研究微分几何一般有三种方法：一种是以向量分析作为工具，本课程就是采用这个方法。另一种是以张量分析作为工具，研究三维欧几里得空间中的曲面专论以及多维黎曼几何多用这个方法。第三种是以外微分形式作为工具，采用嘉当的活动标架法，近代微分几何多采用这个方法。本课程既以分析计算作为工具来研究图形的性质，因此尽量避免冗长计算而重视几何意义。

微分几何是数学系三年级开设的半年课程，讲授时数是51～72学时。读者要在学完解析几何、高等代数、数学分析和常微分方程的基础上来进行学习。关于教材，现已出版的微分几何有多种，下面介绍几种作为课本和主要参考书。课本是：

《微分几何讲义》，吴大任编，1981年，人民教育出版社出版。全书以较小篇幅阐述三维欧几里得空间的曲线和曲面的局部理论，第四版并增加了整体内容。这本书理论严谨，叙述简明，用作教材多年，效果较好。

主要参考书是：

《微分几何》，苏步青等编，1980年，人民教育出版社出版。这本书的特点是介绍整体微分几何一些基本内容较详，但局部内容略一些。

《微分几何》，梅向明等编，1981年，人民教育出版社出版。这本书特点是最后介绍外微分形式和活动标架法的一些基本内容。

课本选定后，建议读者参照下表按排自学。并请读者注意表后所列几点。

微分几何自学时间安排表

单　元	内	容	学　时
一	向量分析		12
二	曲线论	曲线的局部性质	66
		※平面曲线的若干整体性质	18
		※空间曲线的若干整体性质	12
三	可展曲面初论		24
四	曲面论	曲面的局部性质	84
		※曲面的整体性质初步	24

1．自学每节后要小结，并作一定数量的习题（由易到难）；自学每章后，在原书结束语基础上写本章的总结，并作综合习题。

2．学完全书后进行总复习，并作自我测试题。

3．表中凡带有※号的可作选学内容，初学的读者可以略去。

二　向量分析

这是吴大任编《微分几何讲义》的第一章内容。前面已经说过，本课程以向量分析作为工具，所以首先要学习有关向量分析的基本概念。学习的时候要注意这样几点：首先是在学习本单元之前，应先复习解析几何中向量代数部分、平面和空间直线部分。其次是注意向量分析和实数分析的异同。另外还要注意向量分析运算的几何作用。

本单元内容要点共有七个：

（一）向量函数和它的几何意义：首先应当指出，一个向量函数相当于平面上两个坐标函数，或空间里三个坐标函数。它的几何解释就是在解析几何中所讲的曲线的参数方程。要注意向量函数的定义域和值域。

（二）向量函数的极限和连续：这一部分可用以下两种方法进行研究，一种是从向量函数本身出发，另一种是化成坐标函数再进行讨论。学习的时候要处处跟实函数的极限运算和连续性质相对照。

（三）向量函数的导向量和它的几何意义：这一部分有三个要点。

1. 向量函数可导和导向量的概念；

2. 导向量表曲线的切线向量，从导向量引出微分向量和高阶导向量；

3. 导向量的计算公式和复合函数的导向量。

（四）向量函数的泰勒公式：利用坐标函数由实函数的泰勒公式推出。

（五）向量函数的积分：由实函数的积分推出，这部分内容在本课程中不常遇到。

（六）三种特殊向量函数的几何特征：这一部分有三个要点。

1. 变向量具有定长的充要条件和它的几何意义；

2. 变向量具有定向的充要条件和它的几何意义；

3. 变向量同定平面平行的充要条件和它的几何意义。

（七）圆函数：关于这种表示法，以后经常用到，非常简便。见《微分几何讲义》第三章例1。

定义：$\vec{e}(\varphi)=\vec{i}\cos\varphi+\vec{j}\sin\varphi,\ \vec{e}_1(\varphi)=\vec{e}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$，

性质：$\frac{d\vec{e}(\varphi)}{d\varphi}=\vec{e}_1(\varphi)$，　$\frac{d\vec{e}_1(\varphi)}{d\varphi}=-\vec{e}(\varphi)$。

读者可考虑$\vec{e}(\varphi)$和$\vec{e}_1(\varphi)$的图象。

三　曲　线　论

这是吴大任编《微分几何讲义》第二章到第四章的内容。在解析几何里，我们曾遇到一些曲线。由于所用工具的局限，不可能对一般曲线的几何性质作较详尽的了解。在本课程里，首先系统地学习一般曲线的局部性质，至于整体性质，留作选学内容。现在把要点分述于后。

（一）曲线上一点基本三棱形的建立：先在曲线上一点处建立切线和法面，再建立密切面和副法线，就得一个三棱形，它可看作一个局部坐标系。以后将看到，它对曲线的研究起重大作用。应当记住，以任意参数方程所给出的曲线上一点的基本三棱形的三个面和三个棱的方程。

（二）曲线的弧长：要弄清弧长的概念和计算公式，它是一个重要的不变量，记住以弧长作为参数（自然参数）的参数变换公式和在自然参数下基本三棱形的三个棱上的单位向量。

（三）曲线和曲线以及曲线和平面间的切触阶：注意切触阶的概念和作用。

（四）空间曲线的基本公式——弗朗内—塞雷公式：这组公式应用在整个曲线论里，它不但是曲线论的重要内容，而且是研究曲面论所必须具备的基础知识。以后在学到曲线

论的基本定理的时候，才充分显示出它的作用，而且只有通过基本定理，才能全面了解曲率和挠率的重要意义。特殊地，当把平面曲线作为放在 xoy 面里的空间曲线的时候，基本公式将简化成为两个。

1．曲率和挠率的计算公式和它的几何意义，注意具有曲率恒是零或挠率恒是零的几何特征的曲线。

2．曲线在一点邻近的结构，采用自然参数，利用曲线上一点的基本三棱形建立局部坐标系，由基本公式来刻画曲线在一点邻近的变化规律。再利用泰勒公式，就得已知曲线的近似曲线。

（五）曲线论的基本定理——研究曲线的唯一存在定理；证明要用到微分方程组的几个定理，读者如时间不够，可略去它的证明。要求能把定理叙述清楚并能运用。定理包括两个方面：

1．平面曲线的存在定理和基本定理，说明有向平面曲线的形状决定它的相对曲率，而相对曲率还可决定曲线的形状。值得注意的是，在定理证明的同时，还给出曲线方程的求法。

2．空间曲线的存在定理和基本定理，和平面曲线相同，只不过以曲率和挠率代替上面的相对曲率。

（六）特殊曲线：讲到两类特殊曲线。

1．曲率和挠率适合一个线性关系的曲线，其中有柱面螺线和贝特朗曲线等。

2．曲率和挠率适合两个线性关系的曲线。其中有圆和圆柱螺线等。

（七）关于平面曲线的若干整体性质：研究图形的整体

性质，要比研究局部性质困难一些，而且所采用的方法也相对地缺乏一贯性。

由于整体的一些定理彼此联系不多，读者可详细参看课本和参考书。《微分几何讲义》书里这部分内容比较少，而且所设条件多些，容易看懂。苏步青等编的《微分几何》内容丰富，所设条件少些。

（八）关于空间曲线的若干整体性质：这部分的情况和（七）相同。

四 可展曲面初论

这是吴大任编《微分几何讲义》的第五章内容。本单元可作为曲线论和曲面论的桥梁。在这里首先引进有关曲面的一些基本概念，然后对直纹曲面中一类重要的曲面——可展曲面从两个不同角度进行研究，而且证明了可展曲面只有三种。

内容要点分述于后：

（一）有关曲面的几个基本概念：简单曲面片、寻常点和奇异点、参数曲线、正规网。

（二）直纹曲面和可展曲面：

直纹曲面分成可展曲面和非可展曲面两大类，要重点记住可展曲面的定义，以及判定直纹面是可展曲面的充要条件。

作为例题，一条空间曲线的切线产生可展曲面，主法线和副法线却不能产生。

可展曲面又分成三类：锥面、柱面和曲线的切线曲面。

（三）可展曲面的一个特征：可展曲面可以作为单参平面族的包络面，从而把可展曲面再一次进行分类。

五 曲 面 论

这是吴大任编《微分几何讲义》第六章到第八章的内容。曲面论是经典微分几何的一个重要组成部分。首先引进曲面的两个重要的量：第一基本齐式和第二基本齐式，它们相当于曲线的曲率和挠率。其次引进等距对应的概念，从而把曲面进行了一种分类，同时得到曲面的两种性质：内蕴性质和外蕴性质。仅由第一基本齐式的系数和它的导数所规定的量（性质）叫曲面的内蕴性质，否则叫外蕴性质。最后介绍了曲面论的基本公式和基本方程，以备讨论曲面论的基本定理。

内容要点分述于后：

（一）曲面的内蕴性质：这一部分要弄清四点。

1．利用弧长，建立了两个曲面等距对应的概念，从而把曲面进行一种分类：等距等价的曲面属于同类，不等距等价的曲面属于不同类。

2．由曲面的内蕴性质的意义规定，可知等距等价的曲面有相同的内蕴性质。曲面上曲线的交角和曲面面积等都是内蕴性质。

3．短程曲率是平面曲线的相对曲率在曲面上曲线的推广。注意它的几何意义以及计算公式。

4．短程线是平面上直线在曲面上的推广。利用短程线的微分方程可以推出，一点和沿一定方向，总有唯一的一条短程线。它的几何特征是：曲线的主法线和曲面的法线处处重合。

（二）曲面的外蕴性质：这一部分要弄清九点。

1. 凡是和第一、第二基本齐式都有关的性质，必定是它的外蕴性质。

2. 从曲面上曲线的一点处的曲率推出曲面上非奇点处的法曲率的概念，它是曲面上最基本的外蕴性质。

3. 法截线曲率和斜截线曲率的关系，也就是默尼埃定理。

4. 法曲率的最大值和最小值是主曲率，利用主曲率可以计算沿任意方向的法曲率，这是欧勒公式。

5. 全曲率是内蕴性质，中曲率却是外蕴性质。全曲率恒是零是可展曲面的又一特征。

6. 曲面上一点邻近的结构，利用全曲率的符号，把曲面上的点分成三类，然后分三种情况，在每点处就不同方向的法曲率进行讨论，就得知曲面在某一点邻近的形状。

7. 关于曲率线的概念，曲率线总是实曲线，而且采用它们作参数曲线的时候，曲面的第一和第二基本齐式将化简单。曲率线的一个重要几何特征是，沿每一条曲率线，曲面的法线产生可展曲面。

8. 渐近曲线也是曲面上一类重要曲线，它的几何特征是，渐近曲线的副法线和曲面的法线处处重合。

9. 短程挠率是外蕴性质，而短程挠率恒等于零是曲率线的又一特征。

（三）全曲率恒是常数的曲面：具有相同常数 k 的全曲率的曲面，有相同的内蕴性质。共分三种情况：$k=0$，曲面和平面等距等价是可展曲面；$k>0$，曲面和一球面等距等价；$k<0$，曲面和一伪球面等距等价。它们可以分别看作是欧几里得（抛物）几何，椭圆几何和罗巴切夫斯基（双

曲）几何的模型。

（四）曲面论的基本问题：在曲面上取正交曲线网作为参数曲线网，在它的上面一点P处引进一个三棱形〔P；$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$〕，把$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$的偏导矢写成$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$的线性组合，就得到曲面论的基本公式。从此就可以导出基本方程，然后再来证基本定理和存在定理。基本定理指出曲面的第一第二类基本量完全确定曲面的形状；存在定理指出，除了一些连续条件和显然的条件外，只要有六个函数适合基本方程，它们就是一定曲面的第一和第二类基本量。

（五）曲面的若干整体性质：这一部分作为选学内容，不作介绍了。

六　自我测试题

1．叙述并推证空间曲线唯一存在定理。

2．已知欧几里得三维空间里的曲面，说明下列各种曲率间的关系，并指出哪些是内蕴性质（不要论证）。

（1）曲面上曲线的曲率；（2）法曲率；（3）主曲率；（4）法截线的曲率；（5）全曲率；（6）中曲率；（7）短程曲率。

3．（1）以$\vec{r}=\vec{\rho}(u)$作为准曲线，$\vec{\tau}(u)$作为母线方向，（$u_1\leqslant u\leqslant u_2$）写出所产生的直纹曲面方程（$E$）。

（2）可展曲面怎样定义？写出它的两个特征。

（3）推求（E）表示可展曲面的充要条件。

4．已知非平曲线的切线曲面，

（1）建立它的方程；

（2）证明它的点都是抛物点；

（3）求它的渐近曲线方程；

（4）求它的曲率线方程。

5．证明：

（1）曲面的短程线同时又是它的渐近曲线的充要条件是这短程线是直线；

（2）如果一条非直线的曲线同时是两个曲面的短程线，那么这两个曲面必沿这一曲线相切。

点集拓扑学

朱鼎勋

一 概 述

我们经常遇到的自然现象大都具有连续性，因此相应地产生的许多数学问题都和连续性有密切的联系。在数学发展的过程中就产生了处理连续性问题的新分支——拓扑学。

前面已经学过的欧几里得几何、仿射几何和射影几何，它们分别是研究正交变换群、仿射变换群和射影变换群下的不变问题。从几何角度来说，拓扑学就是研究拓扑变换群（一对一的双方连续变换群）下的不变问题。形象地说，拓扑学是研究图形经过弯曲、拉大、缩小或任意的变形下保持不变的性质。例如把橡皮圈能变形成一个圆圈或一个方框；加一个橡皮环柄的橡皮球面能变形成一个环面，而变形后的图形和原图形的拓扑性质是不变的，因此拓扑学有一个通行的形象称号叫做橡皮几何学。

另一方面，通常把图形都看作是安放在一个包围它们的空间之中，因而拓扑学同时还要研究从一个空间到另一个空间的连续函数的性质，这样就必须研究两个空间本身的性质。因此研究拓扑学的主要目的就是阐明空间的几何结构，从而掌握空间之间的函数关系。现在，这门学科已经渗入到并沟

透了数学的许多分支，如微分方程、函数论、泛函分析、微分几何、代数几何、数理逻辑等，而且在其他工程技术中，也有了日益重要的作用。

拓扑学在当代有很多分支，如点集拓扑、代数拓扑、微分拓扑、几何拓扑等，而点集拓扑（或一般拓扑、分析拓扑）却是它们的基础。由于微分方程的需要，产生了傅立叶分析，又由傅立叶分析产生了集合论，点集拓扑就是以集合论作为基础的。从这点可以看出：点集拓扑对于近代数学的作用类似于欧几里得几何对于初等数学、解析几何对于微积分的作用。

点集拓扑是在已经学过数学分析、复变和实变函数的基础上把过去已学的一些知识系统化并加以推广，并且提出一些基本概念、基本理论和基本方法。它也为进一步学习其他学科提供所需的最基础知识。

现在高等院校数学系，一般把点集拓扑放在高年级讲授，半学年用68或72学时讲完。有的院校略去一些内容，而讲些代数拓扑。这里却是把代数拓扑留作选学课程。

关于点集拓扑的课本，已出版的并不很多，有些正在排印，现在介绍下列几种作为课本和参考书，课本是：

《点集拓扑学》，江泽涵编，1978年，上海科技出版社出版。这本书就是《拓扑学引论》第一篇，内容精简、直观易懂，用作课本是比较合适的。

《点集拓扑讲义》，熊金城编，1982年，人民教育出版社出版。这本书较江泽涵编的《点集拓扑学》稍为详尽，可作主要参考书。

《一般拓扑学导引》，李孝传、陈玉清编，1979年，北

京师范大学油印，1981年华中师范学院铅印。这本书内容比较丰富，可培养读者的阅读能力。

读者可根据下表安排自学。

点集拓扑学自学时间安排表

单元	内容	时数
一	集合论初步《点集拓扑讲义》第一章	12
二	度量空间《点集拓扑学》第一章	24
三	拓扑空间《点集拓扑学》第二章	21
四	特殊类型拓扑空间《点集拓扑学》第二章	60

由于本课程比较抽象，学习的时候，一定要注意概念彼此间的关系，并多举些具体例子或反例，用以阐明各个基本概念的涵义和某些重要定理的界限。又本课程概念较多，各书讲法又不一致，参考其他书籍的时候，务必注意各书概念的引入次序。

二 集合论初步

集合论是近代理论数学各部门的基础，它是这些部门的一种共同语言。读者在代数、几何、分析各课程中，或多或少地已接触到有关集合论的一些知识。由于本课程的特点，读者必须较系统地、较熟练地掌握集合论的基本知识，并要作一定数量的习题。这里要注意集合是一个不定义名词，不然将引出悖论。

本单元内容包括下列要点：一些数集的表示（记号），

集合的运算；笛卡儿积，幂积；关系和等价关系。为了把集合中元素联系起来，先引入关系这一概念。再引入等价关系，它的作用是把集合进行分类而建立商集的概念；映射和一一映射；集簇，注意并和交的运算；为了比较两个集合引入等势的概念；选择公理，这个公理，表面看来似很明显，但不能从我们通常对集合的理解出发，加以证明，在集合论中，它有深刻的应用。

三 度量空间

过去我们所学的几何分析等，大都是在欧几里得空间里进行讨论的。而欧几里得空间具有度量特征，它是用距离来阐明的。现在把欧几里得空间里的距离加以抽象化而引进度量概念，用来建立度量空间。这是首先遇到的一个抽象空间，它的范围相当广泛，包括近代数学中常遇到的一些空间。因此度量空间的基本知识是不可缺少的。在这里，将比较系统地研究度量空间的一些性质，要注意它来源于欧几里得空间的哪些性质，而且要比较它和欧几里得空间性质的异同。

（一）度量空间的建立：度量空间利用集合中元素具备某些特征而建立起来，再由已知的度量空间诱导出两个新度量空间——子空间和积空间。值得注意的是，欧几里得空间的子空间不一定是欧几里得空间，而两个欧几里得空间的积空间却是欧几里得空间。对于度量空间中点的邻域和性质，要注意它的来源，这里是无区间概念的。

（二）度量空间的子集：先利用邻域定义开集，再用余集定义闭集，聚点定义闭包和稠密子集，并研究子集和它的

闭包具有的性质，研究子集的闭包和收敛点序列的极限点之间的性质。

（三）连续映射：这是解析几何中线性映射（正交映射或仿射映射）的推广。连续映射简称映射。它的特例是连续函数。要理解两个度量空间的一个对应所具备的五个等价性质。

（四）拓扑映射：为了把度量空间或更广泛的空间里的图形加以分类，引进度量空间的拓扑映射（或同胚）以及拓扑性质等概念。

（五）列紧性质的第一个特征——序列式列紧性。它是欧几里得空间讨论连续函数性质时候所用的波尔察诺-魏尔斯特拉斯定理在度量空间的推广。注意欧几里得空间、度量空间、列紧度量空间的列紧子集和有界闭集的关系，列紧性的序列式特征。

（六）列紧性质的第二个特征——紧致性，它是欧几里得空间中海因内-波莱尔定理在度量空间的推广。这里还用紧致性给出列紧度量空间的又一个特征。

四　拓扑空间

我们已经知道度量空间是欧几里得空间极其自然的推广，现在从度量空间又可以很自然地过渡到更加广泛、更加抽象的拓扑空间。这种空间的来源有两方面的因素：一方面，欧几里得空间和度量空间，它们分别用现实的距离和抽象的距离来刻画，而且都是实数。现在要脱离距离这一概念，也就是完全从现实的欧几里得空间解放出来。另一方面，由于自然现象提供了大量有关连续性的材料，这些也很

需要从更高的观点加以抽象和概括。因此，可以说拓扑空间是由几何和分析相结合而产生的，这同初等几何和初等代数相结合而产生解析几何是非常类似的。

在这里，用度量空间开集的性质作为拓扑结构引进拓扑空间，主要学习拓扑空间以及从拓扑空间到拓扑空间的连续映射的一些基本概念和性质。我们将会看到，度量空间对于拓扑空间的作用如同欧几里得空间对于度量空间的作用一样。

（一）拓扑空间的建立：拓扑空间的建立，有不同的方法。这里是把一非空集合利用度量空间开集的性质而甩开度量空间的概念，规定一个拓扑结构（简称拓扑）而形成一个拓扑空间。

凡是度量空间必是拓扑空间，反过来并不成立。任一非空集合，必能形成平庸空间和离散空间两个拓扑空间，它们分别具有最小拓扑和最大拓扑。

（二）拓扑空间的子空间：设有拓扑空间 $X=(S,\ \tau)$，又有 S 的非空子集 A，且 $\alpha=A\cap\tau$，可证 α 将是 A 上的一个拓扑结构，而把 α 叫做 τ 关于 A 的相对拓扑或子空间拓扑。$Y=(A,\alpha)$ 叫做 X 的子空间（参看《点集拓扑讲义》第二章第 8 节）。注意拓扑空间子集形成拓扑空间，但不是它的子空间。

（三）拓扑基：从度量空间的球形邻域出发，得出开集的概念，加以抽象化，就得到建立拓扑的概念。利用这个思想，引进拓扑空间的拓扑基的概念。一个拓扑空间可能有不同的拓扑基，因此又引进两个拓扑基的等价概念，并讨论它们的判定方法。

（四）两个拓扑空间的积空间：设有集合S和T上的拓扑空间X和Y，又$\{u_\alpha\}$和$\{v_\beta\}$分别是它们的拓扑基，可证笛卡儿积$X\times Y$形成以$\{u_\alpha\times v_\beta\}$作为拓扑基的拓扑空间，而叫做$X$和$Y$的积空间（参看《点集拓扑讲义》第9节）。

（五）拓扑空间的一些基本概念：首先引进拓扑空间的不定义名词"开集"，然后引进邻域概念，它们分别和度量空间的开集和球形邻域相当。于是度量空间的一些基本概念都可类推到拓扑空间。拓扑空间的闭集、闭包具有和度量空间相同的性质。而且两个拓扑空间的一个对应所具备的条件，同两个度量空间所研究的同样问题也非常相似。又两个拓扑空间如果同胚，就说它们拓扑等价。以后将集中研究拓扑空间的拓扑性质。

（六）拓扑空间的商空间：这部分可作选学内容。

五　特殊类型拓扑空间

一般的拓扑空间和度量空间、列紧度量空间之间的差距是很大的，因此要在它们之间引进一系列的拓扑空间作为桥梁。办法是：在一般拓扑空间里加上某些拓扑性质作为限制，使它具有某些特殊意义和合乎要求的特征，就可得出若干类特殊类型的拓扑空间，同时它们还将提供判定不同胚的办法。它们是在近代分析、几何、代数以及代数拓扑等分支方面常常遇到的一些空间。

这部分的内容，包括：

（一）可数性公理：在拓扑空间共有两个可数性公理，记作A_1和A_2。

（二）分离性公理：拓扑空间里共有五个分离性公理，

记作T_0，T_1，T_2，T_3和T_4。

（三）公理A_1和T_1的意义：前面已看到，在拓扑空间里的公理都和开集有关，因而直接地对拓扑空间的拓扑有所限制，而且对闭集、闭包，收敛序列都有影响。这部分将限于讨论公理A_1和T_0，T_1对于闭包和收敛序列之间的影响。

（四）公理A_2和T_1的意义：从度量空间，引出三种列紧性和一种紧致性，读者要注意它们之间的关系。

（五）正则空间和正规空间：在可数性公理A_2和分离性公理的基础上，分别研究正则空间和正规空间的几个特征，以及这两种空间的关系，讨论的时候未涉及到各种列紧性和紧致性，而论及正规空间的连续函数的性质。

（六）度量化定理：拓扑空间一般不是度量空间。在什么条件下，一个拓扑空间是可度量的？这是一个很重要的问题。这里有两个性质：一个是具有可数基的拓扑空间X能度量化的充要条件是：X是T_4空间。另一个是具有可数基的拓扑空间X能度量化的充要条件是：X是T_3空间。要注意在这两个性质中"有可数基"的条件不是必要的。它可减弱为"有至多可数个局部有限开集簇所成的基"，见永田—斯米尔诺夫定理：拓扑空间可度量的充要条件是它具有可数个局部有限开集簇所成集的T_3空间。

（七）紧致的T_2空间：T_1空间已具有一些重要空间的性质，这里将讨论紧致的T_2空间，它保留了度量空间的相当多的重要性质。

（八）连通性：我们知道，直觉观念"不连成一块的数学抽象就是分离性，而"连成一块"的数学抽象就是这里的连通性。但要注意，分离性是局部结构，而连通性却是整体

结构。更须注意运用分离、连通等概念一定要避免直觉观念。

（九）映射的扩张：利用映射的扩张可以刻画拓扑空间的性质。但不是任一映射都能扩张。扩张在拓扑学里占有重要地位。

六　自我测试题

1．给出下列各组中，每个名词的确切定义，比较它们的异同，并说明它们的关系：

（1）度量空间的子空间和拓扑空间的子空间；

（2）A_i空间（$i=1,2$）；

（3）T_i空间（$i=0,1,2,3,4$）；

（4）连通拓扑空间和道路连通拓扑空间。

2．定义：设拓扑空间有可数稠密子集就叫可分空间。证明：第二可数空间必是可分空间。反过来成立吗?

3．证明：T_2空间里，独点集必是闭集。反过来成立吗?

4．定义：如果一个拓扑空间具有某性质P，而它的每一个子空间都具有这性质，那么这性质P叫做可遗传的。证明：当$i=1,2,3$时，T_i公理是可遗传的。

5．证明紧致性是拓扑性质。

6．设X是一个拓扑空间，且M $N\subseteq X$；M,N是连通的又$M\cap N\neq\phi$，那么$M\cup N$也是连通的。

概率论和数理统计

徐承彝

一　概　述

概率论是数学的一个分支，它研究随机现象中有关事件的概率和它的性质。什么是随机现象？随机现象又叫偶然现象，在我们的日常生活中到处都能见到。比如，一枚硬币掉在桌面上，有国徽的那一面可能朝上，也可能朝下；让你在上午十点钟去某一个公共汽车站看一看等车的人数，在十点钟以前你没有办法十分准确地说出这个数，这个数可能是零，也可能是1，2，……到了十点钟才能知道。象这种在一定的条件之下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且带有偶然性的现象，叫随机现象。

人们对随机现象的认识没有停留在"可能出现这样的结果、也可能出现那样的结果"这样的表面现象上。生产的发展、科学研究的深入，使许多学科和部门不断地要求进一步认识随机现象。例如，一个工厂为了保证出厂的产品符合要求，就要对产品进行检验。当产品的数量非常大，或者检验对产品有破坏性的时候，不可能对每件产品都检验，通常就抽验一部分产品，然后根据这部分产品的好坏判断全部产品的好坏。举例来说，从一批含有一定数量废品的产品中任意

抽验10件，来判断这批产品的废品率是否超过1％，在这10件产品中可能没有废品，可能有1件、2件废品，…，也可能10件都是废品。我们仅凭这点可能出现的结果，还无法断言全部产品的废品率是否超过1％，需要进一步研究各种结果出现的可能性有多大。对随机现象的这种研究就形成了概率论的独特方法和丰富的内容。现在概率论已广泛应用于自然科学和社会科学的许多领域，以及工业、农业、商业和国防的许多部门。因此，今天理、工、农、医各类学校和部分文科系科都要学习概率论和数理统计，或者开设专课，或者列为数学课中的一部分。

各类高等学校中的概率论和数理统计课程介绍概率论与数理统计的一些基本概念和基本方法，学过微积分和高等代数就可以学习这门课程。自学的读者可以在下面几本书中选择一本作为学习课本。

《概率论与数理统计基础》，严士健等编，1982年，上海科学技术出版社出版。

《概率统计讲义》，陈家鼎等编，人民教育出版社出版。

《概率论》第一册，第二册第一分册，复旦大学编，1979年，人民教育出版社出版。

《概率论与数理统计》，中山大学编，人民教育出版社出版。

这一课程教学大纲所列内容，讲授68学时左右，自学大约要用200学时。以严士健等编的《概率论与数理统计基础》一书为例，全书可分成三个单元：第一章是第一单元，第二、三、四章是第二单元，第五章是第三单元。自学的读者

可以用略多于50学时的时间读第一单元，用略少于100学时的时间读第二单元。后面就按照这本书作课本，谈谈学习每章时候应当注意的事项。

二 基本概念

概率论研究的是随机现象中有关事件的概率和它的性质。严士健等编的《概率论与数理统计》一书的第一章讲了事件、概率等概念，这是全书的基础。学习数学概念的时候，既要弄明白定义，又要注意概念的产生背景和实际含义。学习概率论的概念尤其要这样。例如，要能够从频率和概率的关系，理解一个事件的概率确能刻画这个事件出现的可能性大小；对于任意两个具体的事件，要能很快地想明白这两个事件的和、积是什么样的事件，它们的对立事件又是什么等等。如果不熟悉这些概念的实际含义就不能使用这些概念去说明问题。在这一章讲的另一个基本概念是独立事件，要从条件概率的含义，理解两个事件独立和几个事件总起来独立的含义。

这一章还介绍了几个具体的概率模型——古典概型、几何概型、n 次独立试验概型等。这些概率模型都是很有用的，其中古典概型讲得更多一些，有关的习题也比较多。学习这一部分的时候，应当注意下面两件事：第一，求古典概型中事件的概率，往往使用排列组合的概念和计算公式，解这种题最重要的是把事件分析清楚，把事件想清楚了，计算“样本点总数”和“事件中包含的样本点个数”的方法自然就明确了。初学者容易犯的一个毛病，是拿到题目后还没有弄明白事件就急于想知道这个题是用排列公式做还是用组合

公式做（其实这个题目可以不用排列组合的公式，或者用哪个公式都可以）。这样本末倒置必导致生搬硬套，不易得出正确的结论。第二，古典概型比较具体、直观，用这个模型理解基本概念是有好处的。古典概型这一部分有许多习题和例题，有一定的难度，题目本身或解题的技巧都会引起读者的兴趣，适当地多做一些题也是有益的，但是不必在这部分停留过久，因为古典概型中的概率计算并不是概率论的中心内容。

另外，第三节中的例1值得注意，通过这个例题，可以体会一下研究随机事件出现的可能性大小的意义。

三 随机变量

已经掌握了第一章的基本概念以后，就要把注意力集中到全书的中心内容方面，全书的中心是随机变量的分布和它的数字特征。

有许多随机现象的随机事件表现为某个变量随机地取值：取这个值或取那个值，在这个范围里（如在某区间里）取值，或在那个范围里取值。这时候，事件的概率可以由读者熟习的普通点函数来确定。对于这类随机现象用随机变量和它的分布律来刻画是自然的，也是方便的。学习这一部分，首先要通过例题熟习这类随机现象中事件的表现形式，自已试着举几个随机变量刻画的随机现象的例子，想一想这些随机现象中有哪些随机事件，然后就要把注意力集中到怎样掌握随机变量的分布律（一般随机变量的分布函数、离散型随机变量的分布列或连续型随机变量的分布密度）上。第二章的内容就是围绕这个中心问题展开的。

第二章2.2，3.2介绍了几个常见的分布，其中正态分布没有具体讲它的产生背景；但是，正态分布（包括多元正态分布）无论在实际应用方面，还是分布的理论研究方面，都十分重要，请读者注意。

求随机变量的分布（分布函数、分布列或分布密度）仍是求事件的概率，不是什么新的问题，因此仍要注意先把有关的事件想清楚。其次思想上要明确求随机变量的分布（一维随机变量的分布、多维随机变量的联合分布和边沿分布、随机变量函数的分布）是一项基本功，必须练好。在阅读课本或作习题的时候，将遇到的困难是多重积分和广义积分的计算，推导麻烦一些，长一些，但只要认真地、一丝不苟地读，一步一步地做，困难是可以克服的，也只有这样才会感到有所收益。

本章第一、四两节分别讲了随机变量和随机向量的定义，但是后来没有再强调它们。例如，讲随机变量和随机向量的函数分布的时候，就默认了这些随机变量和随机向量的函数都是随机变量，这是因为本书受了所用数学工具的限制。读者在这些地方不必深究。

四　数字特征和特征函数

随机变量、随机变量分布的数字特征是刻画随机变量、随机变量分布的某些特征的数值。随机变量的取值规律虽然由它的分布律完全刻画了，但是还需要用它的数字特征集中地刻画某些方面的特点。而在不了解某个随机变量的分布律的时候，知道某些数字特征也能使我们大体上了解这个随机变量的取值规律。

随机变量有许多数字特征，第三章里讲了其中几个主要的，读者可以重点掌握数学期望、方差、相关系数这三个数字特征，一要知道定义、性质和常用分布的数字特征，二要知道这些数字特征能表示随机变量的哪些特点。

第三章讲的第二个内容是随机变量（或它的分布）的特征函数，它是研究随机变量分布的一个工具，分布函数和它的特征函数之间是有一一对应的关系的，当直接求某一随机变量的分布有困难而求它的特征函数比较容易的时候，可以求它的特征函数，然后由特征函数确定所求的分布函数。

第三章第五节5.1性质6、5.2定理2（逆转公式）的证明比较繁琐，第一次阅读可以不看，知道结论就行了。

五　大数定律和中心极限定理

第四章讲了两类极限定理，有时候很难求得随机变量的精确分布，但是在一定的条件下可以求得它的近似分布，而这对于解决某些应用问题来说就足够了。求近似分布就要借助于极限定理。

本章的主要定理是定理3（辛钦大数定律），定理5（柯尔莫哥洛夫强大数定律）和定理6（独立同分布情形的中心极限定理）。

六　统计推断初步

第五章介绍了一些常用的数理统计方法，这是概率论的一个系统应用。

一到四章讲了许多概念，如随机事件的概率、随机变量的分布律和数字特征等等。用这些概念，可以在不同程度上

刻画我们希望认识的随机现象。然而在实际遇到的问题中，事件的概率或随机变量的数字特征，往往是未知的，对于这些未知的东西需要做出较好的估计。数理统计的任务之一，就是根据随机试验的实际结果来估计或推测事件的概率、随机变量的分布、数字特征等等。

这一章对读者的要求是知道一些常用的数理统计方法，能正确地使用这些方法并且对这些方法有一定程度的理解。根据这个目的，建议读者在阅读这一章的时候，先浏览一遍，从各节的例题看看问题是怎样提出来的，解决到什么程度，解决这种问题的思想是什么，然后再系统地，一步一步地读。这一章的1.2，4.2继续研究某些随机变量函数的分布，是第二章内容的继续，读好这两小节才能对下面将介绍的统计方法有所理解，因此，仍要象读第二章那样认真地读。读第一节要注意样本和样本值的差别，前者是随机向量，后者是非随机向量。第二、三两节讲对未知参数的估计和对统计假设的检验。要注意，一个点估计方法是由一个估计量确定的，而估计方法的优劣可以用一些准则来衡量。一个检验方法是由一个判别区域确定的，要从控制和减少两类错误来理解一些常用检验方法的好处。3.4的似然比检验给出了一个构造判别区域的方法，中间有些推导比较烦琐，在第一次阅读的时候可以不看，知道结论就行了。第四、第五两节讲的因子试验中的方差分析方法和线性回归方法都是常用的方法，要熟悉这些方法，理解数学模型是怎样提出来的。

最后在这里试拟几个题目，在最后的复习阶段可以把这些题目作一遍，不用限制时间。列出的题目不是复习提纲，

而且大部分是书的内容和作过的习题，作一作这些题目对于读者复习和巩固学过的主要内容可能是有好处的。

七　自我测试题

1．试述概率的定义，说明概率的实际意义。

2．从0，1，2，…，9中随机地取出5个数（可重复），E_i表示事件"某些数恰好出现 i 次"，$i=0$，1，2，3，4，5（例如取出5 2 3 5 3时E_0，E_1，E_2发生），试说明E_0，E_1，E_2，E_3，E_4，E_5，E_6的关系（如$E_4\subseteq E_1$，$E_0=\Omega$等）并给出图示。

3．什么叫两个事件独立？试给出两个独立的事件。

4．证明两个事件A、B独立的充要条件是

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)。$$

5．设$\Omega=(0,1]$，$\mathscr{F}=\{\phi,(0,\frac{1}{2}],(\frac{1}{2},1],(0,1]\}$，$P(\phi)=0$，$P\left((0,\frac{1}{2}]\right)=P\left((\frac{1}{2},1]\right)=\frac{1}{2}$，$P\left((0,1]\right)=1$，试证$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间。如果

$$\xi_1(\omega)=\begin{cases}0, & 0<\omega\leqslant\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}<\omega\leqslant 1\end{cases};\quad \xi_2(\omega)=\begin{cases}+\infty, & 0<\omega\leqslant\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}<\omega\leqslant 1\end{cases};$$

$$\xi_3(\omega)=\omega。$$

试问哪一个是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量？如果不是，为什么？如果是，它的分布函数是什么？

6. ξ在（0，1]上均匀分布，试证$\eta=-2\ln\xi$服从自由度是2的χ^2分布。

7. 证明：

$$P(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & \text{当}xy\geqslant 0,\\ 0 & \text{当}xy<0\end{cases}$$

是一个概率分布密度函数并求出两个边沿分布。

8. ξ_1，ξ_2，…，ξ_n独立，都在$[a,b]$上均匀分布，设 $\eta_1=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\xi_i\}$，$\eta_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\xi_i\}$。试分别求$\eta_1$，$\eta_n$和$\eta_1+\eta_n$的分布。

9. 试述一维随机变量的数学期望和方差的定义，并说明它们的实际意义。

10. 随机变量ξ的数学期望、方差都存在。x_1，…，x_n是ξ的样本，试说明用 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$作为$E\xi$的估计值有哪些好的性质？为什么？

11. x_1，x_2，…，x_n，y_1，y_2，…，y_n独立，$x_i\sim N(a,\sigma_1^2),i=1,2,\cdots,n,y_j\sim N(b,\sigma_2^2)$，$j=1,2,\cdots,n$。试证：

$$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(a-b)}{\sqrt{\frac{S_x^2+S_y^2-2S_{xy}}{n-1}}}\sim t(n-1),$$

其中$S_x^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$，$S_y^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$，

$$S_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}),$$

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i;$$

如果$x_1=7.9$，$x_2=8.2$，$x_3=8.1$，$x_4=8.7$，$x_5=7.5$，$x_6=9.1$，

$y_1=7.8$，$y_2=7.3$，$y_3=7.6$，$y_4=8.4$，$y_5=7.7$，$y_6=7.9$，

试对$a-b$做区间估计，置信系数用0.95。

数学物理方程

洪吉昌

一 概 述

数学物理方程是由自然科学和工程技术中出现的一些偏微分方程组成的一门大学数学专业课程；有时它也包括积分方程、微分积分方程。它的训练意义是培养学生综合运用基础课的知识，去解决物理、力学和工程技术中常见的一些偏微分方程的初步能力，进而为学习现代偏微分方程理论作准备。

1977年，国家拟订的教学大纲规定，本课程的主要内容是三类古典数学物理方程：波动方程、热传导方程和调和方程。讨论它们的基本定解问题的解法、适定性和解的基本性质。

数学物理方程一方面不断地向其他数学分支提出新问题，促使它们发展，另一方面又大量地吸收其他分支的新成果，形成自己的新方法、新理论，这是数学物理方程的一个特点。因为这样，就给学习带来一些困难。为了理解它的基本内容，必须掌握数学分析、常微分方程、普通物理、线性代数、函数论的基本知识。在这几方面有欠缺的读者，应当及时地补习一些相应的知识，多作些练习来弥补自己的不足。本课程的另一个特点是它和物理、力学、工程技术的联

系比其他任何数学分支更直接、更密切。不仅它所研究的问题往往直接来自上述各门科学，而且它的基本解法多半有明显的实际背景。因此，为了深入了解数学物理方程的理论系统和研究方法，不掌握几个典型的物理模型是不行的。学习的时候，应当经常把这些模型的物理现象和方程中相应的理论、方法进行对比。一句话，要善于借物理模型启发自己的思维，才不至于觉得它的理论和方法古怪而难以接受，才会认为那是水到渠成的自然道路。

自学的第一个问题是选择课本，现在介绍几本供读者参考。

《数学物理方程》，复旦大学数学系编，1979年，人民教育出版社出版。这本书是高等学校的试用教材，可以选作自学课本。

《数学物理方程》，陈庆益编，1979年，人民教育出版社出版。这本书也是高等学校的试用教材。

《数学物理方程》，兰州大学、北京大学数学系合编，1961年，人民教育出版社出版。

《高等数学教程》第二卷第三分册，斯米尔诺夫著，商务印书馆出版。

《数学物理方法》吉洪诺夫、萨马尔斯基著，高等教育出版社出版。

我们建议用复旦大学数学系主编的《数学物理方程》作为主要课本，其他各书，可作参考书。

本课程一般开设在大学第三学年，基本内容讲授时间50-60学时。这里按照基本内容的四个部分拟了一个自学计划，供读者参考。表里的自学时数大致是授课时数的三倍。

数学物理方程自学时间安排表

单元	内容	学时
一	波动方程	60
二	热传导方程	30
三	调和方程	42
四	二阶线性偏微分方程的分类和总结	30

二 波动方程

本单元内容是复旦大学数学系编《数学物理方程》一书的第一章。波动方程是最简单、最典型的双曲型方程。一维波动方程描述理想化了的弦振动规律，所以也叫弦振动方程。实际上，许多振动过程的研究可以归结为这类方程的各种定解问题，其中最重要的是柯西问题和混合问题。

学习本单元要着重掌握以下内容：

（一）根据力学定律导出弦振动方程，搞清楚每个量的物理意义和各类定解条件的实际背景。只有这样，才能比较容易地理解它的各种基本定解问题的提法、解法和解的性质。

（二）柯西问题：一维齐次方程的达朗贝尔解法，在研究偏微分方程的时候，自然希望能象某些初等常微分方程那样，用积分的方法把它的通解求出来，再依据定解条件由通解确定出定解问题的解。无界弦自由振动的柯西问题的达朗贝尔解法就是这样想的。这解法中引入的特征线等概念，对

双曲型方程和它的解的研究极其重要。

以无界弦自由振动中波的传播作为基础，可以利用波的反射解决半无界弦的振动，也可用延拓法求解。

但是，应该指出，虽然找出通解的显式表示对研究方程可能提供许多方便，然而这种先求通解的方法只能用于为数极少的简单方程。这不仅是因为通解的求法难找，而且用定解条件由通解决定未知函数也往往非常困难。

一些高维的特殊情形，如三维的球对称情形，可归结为半无界弦的振动，从而得到求解公式。照这样推想，对于一般（非球对称）情形，通过球平均法，把问题归结为对称情形，然后借助于函数和它的球平均之间的联系得到了三维波动方程柯西问题的求解公式——泊松积分。但是，把上述方法用于二维波动方程的时候，却不能把问题归结为已经解决了的情形，这就是引入降维法求解二维波动方程柯西问题的原因。

对非齐次方程情形，由物理上动量-冲量定律的启发，一般用齐次化原理解决。读者可结合求解公式讨论物理意义。如果觉得这方法的基本思想不好理解，不妨复习一下二阶非齐次常微分方程的齐次化原理的解法（可参考常微分方程课本）。

（三）混合问题：分离变量法是解偏微分方程的基本方法，以后各章还要用到它。这解法的思想来源于物理学中的叠加原理。其实，在线性代数、常微分方程中已经多次使用这一原理。数学问题的线性性质正是物理现象服从叠加原理这个事实的反映，因此在解决数学中的线性问题的时候，叠加原理起着重要作用。一些复杂的振动可分解成各种频率的

波的叠加，正是这个事实促成了求解一维齐次波动方程齐次边界条件的混合问题的分离变量法。根据这个方法，问题的解可以表示成一个函数项级数，其中每项代表一个单频率波。

对非齐次情形，可利用叠加原理、齐次化原理和作函数变换等方法求解。

一般只讨论第一类混合问题，但有关的方法和结论适用于第二、三类混合问题。

（四）能量不等式和解的适定性：利用上面求得的解（形式解）的表达式，不仅可以在一定条件下证明古典解的存在性，而且还可证明解是唯一、稳定的。但是这种方法既要依赖于解的表达式，又要给解加上许多限制，从而丧失了普遍性；因此一般宁愿用能量积分讨论解的适定性。能量积分方法不仅能够推广到更一般的方程和更广泛的解的概念，而且具有明确的物理意义。

在能量不等式中我们又一次看到了“特征”概念的重要性，读者要特别注意。这种情况今后还要遇到。

三 热传导方程

本单元内容是复旦大学数学系编《数学物理方程》一书的第二章。热传导方程是最简单、最典型的抛物型方程。热的传导、物质的扩散等许多物理现象都能归结为这类方程的各种定解问题。和以前一样也只研究柯西问题和混合问题。关于这部分的学习，我们提示几个问题：

为了能比较透彻地理解热传导方程的理论和方法，至少要搞清楚热在固体中的传导这个简单物理模型，学会根据傅

立叶传热定律、热量平衡原理推导热传导方程和它的各种常见的边界条件。

极值原理是热传导方程的重要性质之一。用这原理可以解决热传导方程混合问题和柯西问题解的唯一性和稳定性，这是数学物理方程中一个有普遍性的方法。这里证明极值原理的时候，要构造辅助函数，而构造函数的方法，较难掌握；似乎纯粹是"凑"的，其实这方法并不是凭空想出来的。首先要紧紧抓住$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的物理意义和函数在它的极值点的特性，然后根据物理模型的启示，把物理现象和它在数学上的表现联系起来，就不难掌握辅助函数方法的思想和技巧。

另一个问题是求定解问题的解：热传导方程柯西问题的求解公式（泊松公式）可用傅立叶变换方法求得，混合问题的求解公式可用分离变量法或拉普拉斯变换方法求得。分离变量法是前面已经见过的。因此，学完本章应该掌握积分变换（包括傅立叶变换、拉普拉斯变换）方法。实际上，积分变换法和分离变量法一样，也是基于线性方程的叠加原理。运用积分变换可以减少某些线性偏微分方程的自变量，或者把偏微分方程变成常微分方程，甚至代数方程。积分变换法对于线性方程，尤其是对于常系数方程，特别有效，它能按一种固定的步骤处理相当广泛的一类方程的定解问题。学习积分变换法，主要是领会它的基本思想，熟练地运用它的基本性质，借助于积分变换表，去解决常见的偏微分方程的定解问题。

应该注意，一般在介绍方法的时候，为了不过多地牵涉复杂而细致的讨论，常常只作粗略的叙述，特别是这种方法

通常用于分析过程，所以我们不必深究一些形式运算的合理性，所得结果常用综合过程来验证。

四 调和方程

本单元内容是复旦大学数学系编《数学物理方程》一书的第三章。研究稳定的热传导、不可压缩流体的无旋运动、静电场的电位分布，都可以导出泊松方程或调和方程。关于热传导问题，因为考察的是稳定状态的分布，所以方程的解和时间无关，只有边界条件。这时候，定解问题只是边值问题了。一般有三种边界条件，相应地有三类基本定解问题。本课程只研究第一、第二内（外）边值问题。

学习本单元要着重掌握以下内容：

（一）如能求得泊松方程的一个特解（这种特解一定能找到），就可通过未知函数的变换把泊松方程的第一、第二边值问题转化成为调和方程对应的边值问题，因此，一般只研究最典型的调和方程的边值问题。

（二）由前面知道齐次热传导方程的解满足极值原理，现在完全类似，调和方程的连续解（叫做调和函数）也满足极值原理。利用这个原理可以证明调和方程第一边值问题的解的唯一性和稳定性（但要注意三维和二维的第一边值外问题对解在无穷远处的要求是不同的，这可从它们所反映的不同物理情况去理解）。

（三）用格林公式和三维调和方程的基本解$\frac{1}{r}$的奇性（这里r是两点的距离），可以建立调和函数的基本积分公式。用这个公式解第一边值问题，立刻导致调和方程的格林函数概念，应用它就得到调和方程第一边值问题的求解公式。

格林函数在静电学中有明确的物理意义，因而可用静电源像法求某些具有特殊对称性区域的格林函数。比如容易求出球的格林函数，从而可得球的第一边值问题的求解公式——泊松积分。

由于泊松积分表示了球里的调和函数，因而它是研究调和函数的重要工具之一。例如可以用它证明：连续函数是调和函数的充要条件是具平均值性质、关于调和函数序列的一致收敛定理、孤立奇点可去性定理和很重要的调和函数的解析性定理。

（四）所有论述，对 n 个变量的调和函数可用类似方法加以证明，就是先建立相当的 n 维球上的泊松积分，然后从它出发进行论证，只是在二维的时候用调和方程的基本解 $\ln\frac{1}{r}$，其他情形用 $\frac{1}{r^{n-2}}$。

在 $n=2$ 的时候，求解调和方程的第一边值问题也可用已经很熟悉的分离变量法，还可利用复变函数论。

（五）最后注意，用辅助函数法可以证明强极值原理，从而可证明调和方程的第二边值问题解的唯一性（内问题是在相差一个常数意义下，外问题和维数有关），应用格林公式也可给出第二边值问题的求解公式，但要引入牛曼函数，比前面讨论的要复杂，超出了一般基础课的范围。

五　二阶线性方程的分类和特征

本单元内容是复旦大学数学系编《数学物理方程》一书的第四章。从前面三部分内容可以看到，波动方程、热传导方程和调和方程各描述不同类型的物理现象，各提出不同的定解问题，而且这些方程的解也各有不同的性质。这些差

别可从它们各自相应的物理现象找到解释。这一章的主要任务就是从数学上集中概括这些差别的本质，找出二阶线性方程的分类标准，为研究一般的二阶线性方程打下基础。

学习本单元应注意以下内容：

（一）三类方程的区分取决于二阶方程的主部（方程中包含未知函数 u 的二阶偏导数的部分叫做方程的主部）所对应的代数二次型的代数性质。需分两种情形讨论：

1．方程有两个自变量的情形：方程的类型取决于二次型的判别式在这一点的符号。容易知道，经过化标准形，各类方程的主部可以分别化成和一维波动方程、一维热传导方程、调和方程相同的形状。

2．有多个自变量的情形：方程的类型由二次型在这一点是正（负）定、不定、退化来区分（包括两个自变量的情形）。前面讨论过的高维波动方程、热传导方程和调和方程分别是双曲型、抛物型和椭圆型。

应该注意，首先，认识到方程的分类，不只是消极地解释各类方程的差别，更重要的是积极地掌握各类方程的特性，好把各类典型方程的研究方法和主要结果推广到这类方程上去，以便解决更复杂的问题。

在偏微分方程的进一步讨论中，将会看到，这种分类法是有实际意义的。大体上说，同类方程可以提同类型的定解问题，它的解也具有基本相同的解析性质。前面三部分中，关于三种典型方程得到的主要结果和研究方法，大多数可以用到三类方程的研究上去。

其次，二阶方程化标准形的时候，如果主部的系数在所考虑的区域是常数，那么方程在整个区域属于同一类型，并

且可以用同一常系数线性变换把方程在整个区域化成标准形。

但是主部不是常系数的时候，在不同区域方程可能属于不同类型。如果在某一个点的邻域上属于同一类型，那么，当 $n=2$ 的时候，可以局部地用可逆的光滑变换把原方程化成标准形。但是，当 $n\geqslant 3$ 的时候，一般就没有这样的变换了。

（二）二阶方程的特征：借助自变量的变换，化二阶方程成标准形的过程，自然要导致特征概念。用二阶方程相应的代数二次型的代数性质对它分类的全部陈述都可以用"特征"术语表达。在特征方向确定的坐标下，方程取得标准形式。

特征对于双曲型方程具有更加重要的意义。例如，特征线或特征锥起了决定影响区域、决定区域和依赖区域的作用。两个自变量的一阶双曲型方程组的解法更是以特征理论作为基础的，因此，对特征理论应给予足够的重视。"特征"在偏微分方程中有较深远的含义，读者应逐步加深对它的理解。

另一个导致"特征"概念的途径，是对在怎样的曲面（曲线）上方程的解可以发生"弱间断"这个问题的讨论，这更深刻地说明了，"特征"和方程的类型的概念是不同类型的方程所描述的物理过程所具有的不同本质的反映。

六 自我测试题

1. 用分离变量法求混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=1, & (0<x<\frac{\pi}{2},\ t>0) \\ u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0, & (t>0) \\ u\Big|_{t=0}=u_t\Big|_{t=0}=0, & (0<x<\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

的解的表达式。

2. 用分离变量法求在半径是a、顶角是θ_0的扇形区域内部的调和函数，而边界条件是

$$\begin{cases} u\Big|_{\theta=0}=u\Big|_{\theta=\theta_0}=0 & (0\leqslant\rho\leqslant a), \\ u\Big|_{\rho=a}=f(\theta) & (0\leqslant\theta\leqslant\theta_0), \end{cases}$$

这里$f(0)=0=f(\theta_0)$。并求出当$f(\theta)=\sin\frac{\pi}{\theta_0}\theta$时，$u(\rho,\theta)=$?

3. 用傅立叶变换法求柯西问题

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}-tu=0, & -\infty<x<+\infty,\ t>0, \\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

的解的表达式。

4. 验证$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$是方程$u_t-a^2u_{xx}=0$的解，并讨论它是否是以下定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty,\ t>0, \\ u\Big|_{t=0}=0, & -\infty<x<+\infty。 \end{cases}$$

5. 求解柯西问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} & \left(-\infty<\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}<+\infty,\quad t>0\right), \\ u\Big|_{t=0}=0 & \\ u_t\Big|_{t=0}=x^2+y^2+z^2. & \left(-\infty<\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}<+\infty\right). \end{cases}$$

6. 把方程化成标准形，并求解柯西问题：

$$\begin{cases} u_{xx}-2\sin x\, u_{xy}-\cos^2 x\, u_{yy}-\cos x\, u_y=0, \\ u\Big|_{y=\cos x}=\varphi(x), \\ u_y\Big|_{y=\cos x}=\psi(x), \end{cases}$$

并求出当$\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=1$时的解。

7. Ω是有界区域，Γ是它的边界，试证明定解问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_x+u_y=0, & (x,y)\in\Omega, \\ u\Big|_{\Gamma}=f(x,y) \end{cases}$$

的解唯一。其中$f(x,y)$是连续函数。

8. 证明柯西问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+a u_x+b u, \\ u\Big|_{t=0}=\varphi_0(x), \\ u_t\Big|_{t=0}=\varphi_1(x) \end{cases}$$

的解唯一。其中a，b是(t,x)的光滑函数。

计 算 数 学

沈嘉骥

一 概 述

由于快速电子计算机的广泛使用，计算数学近年来有飞速的发展。它的理论和方法已影响到许多学科，并且广泛应用到科学、技术、生产、管理、教学、国防等众多领域里去。因此，学习并掌握计算数学的基本原理和方法技能，已成为数学工作者和广大科技工作者的共同要求。

在大学里，计算数学这门课一般安排在三四年级。因为学习这门课程需要掌握数学分析、线性代数以及常微分方程和偏微分方程的基本知识。本课程的讲课学时大约是72学时。自学的读者，可根据自己的实际情况，适当增加。学习本课程要求初步掌握计算数学的基本理论、方法和特点，了解计算机解题的特点和过程，同时也可以巩固已学的数学知识、

计算数学参考书很多，基本上都是为各类专业人员编写的，这几本书是：

《计算方法》，北京大学、清华大学合编，上、下册，1974年，1980年，人民教育出版社出版。

《计算方法》，武汉大学、山东大学合编，1979年，人

民教育出版社出版。

《计算数学简明教程》，何旭初等编，1980年，人民教育出版社出版。

计算数学这门学科具有实践性比较强的特点，一般课本不大适合于自学，或者说，自学估计仍然会有许多困难，因此，这里我们不得不先用比较大的篇幅来介绍本学科的内容、特点，然后在后面的几节里谈谈课本各章的学习问题。

（一）计算数学的任务和要点：解决任何科学技术和生产问题，几乎都离不开数学的计算。复杂的计算需要借助计算工具。无论什么样的计算工具，即使是最先进的电子计算机，也只能进行有限次四则运算和逻辑判别。计算数学的任务就是在把计算工作吩咐给计算机之前，先把各类数学计算问题转变成为有限次的四则运算。按照一定顺序编排的有限次的四则运算和逻辑运算的计划叫做算法。因此也可以说，计算数学是研究各种算法的。

算法是近似计算的方案，它能否解决理论或实际问题，就要看各个算法的计算结果是否达到需要的精确度。因此，算法的精确度是评价算法优劣的第一个标准。但是作为一个实用的算法，单有精度这一点要求还是不够的，必须再有运算量小、速度快这两个条件，才能满足实际工作的需要。另外，任何一个计算方案，最终总要编成程序，然后投入计算机去计算，因此好的算法还必须具备逻辑结构简单、节省机器单元、容易在计算机上实现等特点。

为了达到上述目的，需要讨论计算数学的几个基本问题。

1. 算法的精确度：讨论近似值和理论值之间的误差。

2. 算法的收敛性：在不计舍入误差的原则下，讨论近似值能否任意逼近理论值。

3. 收敛速度和加快收敛技术。

4. 算法的稳定性：研究初始扰动和舍入误差在计算过程中的传播情况，以及对计算结果的影响。

5. 压缩存贮问题：讨论怎样充分利用计算机的有限内存容量，发挥机器的最大效率。

这五个问题贯穿全书，它们是计算数学的常规课题，因此也是我们学习本课程要关心的方向。在处理这些问题的时候，又有几种常用的概念和技术，学习后面内容要时常联系这些概念和技术，才能逐渐体会和掌握它们。

（二）重要概念和技术：这门学科中有下面一些重要的概念和技术。

1. 误差和误差估计：处理上面所列的基本问题的时候，都自始至终要讨论误差。可以说，提出算法并且分析其中的误差是计算数学最基本的理论工作。

2. 离散化：因为电子计算机只能处理有限的离散问题，所以怎样把连续的问题离散化，怎样利用离散的结果构造连续函数，是常常要处理的问题。不同的离散方法往往导致不同的算法。

3. 逼近：用简单的函数近似地代替复杂的函数，用具有一定数位的数代替已知或待定的数，是近似计算中常用的概念和技巧。

4. 递推：为了把复杂的运算化成简单运算，要尽力在公式之间找出递推关系，这是计算数学中的普遍规律。

5. 叠代：叠代法能适应计算机的特点，是求解方程的

普遍方法。它的逻辑结构简单，能节省机器单元，由于这些优点，几乎在每一部分都要用到它。

（三）主要内容：本学科包括四方面主要内容。

1．数值逼近：主要包括函数插值、曲线拟合、数值微分和数值积分。近年来样条函数和快速傅立叶变换成了这邻域里十分活跃的分支。

2．数值代数：主要包括线性方程组的各种解法和代数特征值问题。近年来对大型稀疏矩阵、广义逆矩阵和广义特征值问题有许多讨论。

3．微分方程的数值解：常微分方程的数值解主要讨论初值问题。目前对刚性问题有较多的讨论。偏微分方程边值问题的数值解主要有差分法和有限元法。近年来关于有限元方法的理论和应用有很大的发展。

4．非线性方程求解和最优化方法：这一方法在国民经济和国防建设的广泛邻域里得到应用，因此也是目前十分活跃的分支。

二　误差的基本知识

学习本节内容的要求，有三个方面：

（一）了解误差的来源；

（二）掌握误差和有效数字的概念，掌握各种运算规则；

（三）在数值计算中，要有重视误差分析的观念。

怎样达到上述目标呢？要注意四个“联系”，这就是：

1．联系实际背景：当你把实际问题抽象为数学模型的时候，你才能理解为什么会有模型误差。当你根据公式的要

求选取参数的时候，自然会清楚为什么有观测误差。

2. 联系计算机的特点：一是计算机只能处理有限的离散问题，就是说它只能对有限位数进行有限次运算。二是要了解计算机上数的表示和运算规律。在你了解了这两个特点之后，便能理解截断误差和舍入误差产生的原因，也会理解为什么要对计算结果进行误差分析。这正是手算时候忽略的问题，而对数值计算来说是不容忽视的。

3. 联系微分法则：因为有关误差的许多概念和算律都可以从微分法则找到依据。

4. 联系后继各章节的内容：只有经过具体的反复学习，才能学会怎样进行误差分析并逐步树立数值计算的观念。

三 函数插值

插值法是函数逼近最重要的方法。由于它简单而实用，所以广泛地应用于生产和科学技术的各个方面。对计算数学这门学科本身来说，插值法又是数值微分、数值积分和微分方程数值解的基础。

插值的内容很广泛，我们可以先学习代数插值，也就是以多项式作为插值逼近函数。因为这种插值形式简单，便于计算，应用最广。应由浅入深地学，先从一次二次插值入手，体会方法要领，再学高次插值就不难了。学习重点是掌握拉格朗日插值多项式基函数的构造方法。因为这是一个带有普遍意义的方法，对学习各种函数逼近以及有限元方法都有直接的指导作用。我们可以在“怎样提高精度”的要求下，依次结合下面提出的几个问题来组织整章的学习。

（一）怎样构造插值多项式？它的精确度由哪些因素决定？

（二）为了提高精度，增加结点的方法和分段插值的方法各有什么优缺点？

（三）怎样才能把插值曲线的光滑度提高到C^1和C^2？

在你回答了以上三个问题之后，一定会发现，三次样条函数插值可以达到较高的精度和良好的光滑性，所以应用较广。虽然这个方法优点很多，但由于计算量比较大，因此在一般精度要求下，多项式插值仍是一个简单实用的方法。

有兴趣的读者可以在这个基础上学习一点三角函数插值，并由这里出发学习快速傅立叶变换的原理。这是近二十年才发展起来的很有效的数值方法，能了解它的梗概也是一点愉快。

四 曲线拟合

在科学实验或统计工作中，我们时常要从一组测定的数据$y_i=f(x_i)$，$i=1,2,\cdots n$，求x和y的近似关系式$y\approx f(x)$。从图形上看就是由平面上给定的n个点(x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots n)$求一条和这些点拟合得最好的曲线$y=P(x)$。插值法可以处理这类问题，照这个方法要求曲线通过全部结点。但是拟合曲线所依据的(x_i, y_i)总有误差，如果曲线通过全部结点，势必承受全部观测误差，显然那不是理想的拟合曲线。怎样才能求出“最好”的曲线呢？这就是本节要讨论的问题。

学习曲线拟合要抓住最小二乘原理和最小二乘法这个要点，解决好下面三个问题。

（一）怎样规定“最好”拟合曲线的标准：我们希望这个标准既能使曲线对各点的误差尽可能地小，又要使得曲线能够反映数据的一般趋势而不受局部波动过大的影响。根据统计知识，用误差平方和的大小作为拟合好坏的标准，可以达到上述要求。这是什么道理呢？请读者想一想。这就是最小二乘原理。

（二）怎样求最好的拟合曲线：可以用最小二乘法。它根据多元函数极值的理论，把求极小值的过程化成线性代数方程组的求解，这组方程叫做正规方程组。这就是曲线拟合法，也就是统计回归方法。

（三）以上方法有什么缺点，怎样改进：为了搞清这个问题，给读者提几个思考问题：当正规方程组的阶数增高的时候，将产生什么现象？为什么会影响解的精确度？什么是广义多项式？为什么要引入广义多项式和加权的最小二乘法？正交多项式用于曲线拟合，对于提高精度、减小计算量有什么作用？

五 数值积分和数值微分

许多实际问题都需要求定积分。由积分学基本定理知道，连续函数的定积分能用原函数的值表示。可是在许多情况下，原函数十分难求，甚至不能用初等函数表示。有时候函数关系是由数表给出的。所有以上情况都不能借助原函数求定积分，因此数值积分是必要的。

我们在数学分析课中已经学过几种近似积分公式，现在要学的方法就是它们的发展。

学习本节要掌握三点。

（一）牛顿-柯特斯公式：在有限区间上用插值多项式代替被积函数所建立的求积公式叫做牛顿-柯特斯公式。它和梯形公式、抛物线公式有什么关系？它的精度受哪些因素影响？怎样提高精度？单纯增加结点能否提高精度？为了提高精度，为什么复化方法较好？回答这些问题是掌握本方法所必须的。

（二）龙贝格求积法：计算机能自动估计误差，又能自动选取步长，利用这些方便，根据事后估计法的思想，总结出一套逐步分半加速收敛的方法，把梯形公式的计算值加工成精度比较高的结果，这就是龙贝格求积法。它的加速原理意义广泛，计算步骤简明，是定积分计算最有效的方法。因此必须掌握它。

（三）高斯型求积公式：在节点等距分布的情况下，龙贝格算法是最有效的求积方法。如果适当安排插值节点是否可以把公式的精度再提高呢？这就是高斯型求积公式所要解决的问题。应该搞清：什么是公式的代数精度？怎样选择结点才能把代数精度提到最高限度？和龙贝格公式相比，它有什么优缺点？

数值微分是由数表形式给出的函数求导数。它的原理也是用过所给点决定的插值多项式 $P_n(x)$ 代替想象的函数 $f(x)$，用导数$P'_n(x)$作为$f'(x)$的近似值。然而一般说来，$P_n \to f$未必能保证$P'_n(x) \to f'(x)$，所以这种办法有可能失败。比较可靠的办法有两个：一个是用三次样条函数 $S(x)$ 作为逼近函数。一个是把微分转化成为积分，再化成线性方程组求解。

这两种方法怎样计算？为什么它们的精度好些？有什么

优缺点？这正是学习数值微分应回答的问题。

六　线性代数方程组的解法

给定一个线性代数方程组，只要系数行列式不是零，便可用克莱姆公式求出全部解。但是计算量随着方程组阶数的增加而急剧增加，因此它不是好的计算方法。解线代方程组有效的数值方法有三类。

（一）直接法：指的是在不计舍入误差的前提下，经有限步计算能求得方程的精确解。它的代表是高斯消去法。学习这个方法要解决以下问题：计算步骤怎样进行？为什么要选主元？怎样选主元？方阵的三角分解和高斯消去法有什么关系？它有什么优缺点？

（二）叠代法：这是一种逻辑结构简单、又节省机器单元的普遍方法，不仅能解线性方程，而且是解非线性方程的重要方法。我们首先要搞清叠代法的基本思想，然后具体讨论雅可比、塞德尔和SOR三种叠代格式。为了看得清楚，首先把三者的分量形式写出来，弄清各自的结构，比较异同，以及为什么塞得尔法比雅可比法更节省单元？再用矩阵分裂的方法写出它们的矩阵形式，比较SOR法和前面两种方法的联系。最后利用矩阵范数理论和谱半径概念讨论三种格式的敛散性，并且比较它们的收敛速度，再选一个数值例子验证以上结论。这样才可以既会计算又懂道理。

（三）最速下降法和共轭斜量法：这是一种变分法，它把线性方程组求解问题化成和它等价的二次函数的极小问题，从而利用分析方法求解。从理论上说它属于直接法，但由于舍入误差的影响，经有限步计算不能得到精确解，常常

作为叠代法来使用。这个方法容易推广到非线性情形，因此广泛地用于最优化方面。这部分内容可以作为进一步学习的要求。

七 矩阵特征值和特征向量的计算

矩阵特征值问题，是线性代数和微分方程数值解讨论的重要课题，也是计算数学比较困难的部分。学习这部分内容要复习矩阵特征值和特征向量的基本知识，以及三角分解的有关结论。

希望读者能了解向量叠代法和变换方法的基本思想，并掌握它们的代表：幂法和雅可比法的求解过程。

（一）幂法（和反幂法）是求矩阵绝对最大（小）特征值和它的对应特征向量的方法。这是一种向量叠代法，它不破坏原始矩阵，而是利用原始矩阵产生一系列叠代向量来求解。我们应搞清幂法的思想、功能、条件、收敛速度和特征值分布的关系，以及为什么不易在计算机上自动计算等问题。此外，对于求其他特征值所采用的收缩降阶方法和子空间叠代法的基本思想、步骤和功能，也要有所了解。

（二）雅可比方法是求实对称矩阵全部特征值和特征向量的方法，这是一种典型的变换方法。它通过一系列正交相似变换把矩阵逐步对角化，从而容易求出全部特征值和特征向量。雅可比方法精度比较高，速度比较快，是目前求中等规模矩阵特征值最常用的方法。

（三）QR 方法是近二十年才发展起来的一种变换方法，公认用它求矩阵全部特征值和特征向量最有效。它把正交三角分解和相似变换结合起来，把矩阵逐步上三角化或拟

上三角化，并具有自动降阶收缩的功能，从而容易求出全部特征值。这个方法每步都要进行一次正交三角分解，计算量比较大，所以经常和其他方法配合使用以减小运算量。初学的人只要对本方法有一点了解就可以了。

八 非线性方程的求解方法

任意给了一个非线性方程，要处理三个问题：根的存在、根的隔离和根的精确化。我们主要讨论第三个问题。由于非线性方程包括高次代数方程和超越方程，类型很不固定，很难有统一的直接方法。常用的方法有以下几种。

（一）对分区间法：这是一种简单的方法，它的原理和步骤都极简单，虽然它的收敛速度不快，但是用它求方程的粗略近似根是很方便的。只要稍加注意它的适用范围就不会有什么困难。

（二）叠代法：这是使近似根逐步精确化的普遍方法，学习的时候，应考虑并回答以下几个问题：

1． 叠代法的基本思想是什么？怎样才能构造出收敛的格式？叠代函数的导数和收敛性、收敛速度有什么关系？

2． 怎样控制误差精度？为什么只要相邻两次叠代值任意接近就可以使误差任意小？

最后要把叠代法和压缩映象原理联系起来，这会加深对叠代本质的理解。

叠代法的结构虽然简单，但由于叠代函数变化很大，以致收敛速度不易控制。

（三）牛顿法：我们希望得到一种收敛速度比较快的固定格式，牛顿法就是比较理想的方法。学习牛顿法应该注意

几个问题：

1．基本思想是什么？为什么说它具有普遍意义和富有启发性？

2．收敛速度有多快？

3．适用范围和怎样选择初值？

4．怎样推广到方程组情形？

（四）弦位法和抛物线法：这两种方法也是很好的近似方法，我们对这些方法的原理和解题步骤也应有所了解。

九　常微分方程初值问题的数值解

对于常微分方程，除了少数几类简单方程外，要写出解的解析表达式是困难的，有时甚至是不可能的。因此需要研究数值解法。学习这部分内容可以分两个阶段进行：首先掌握基本思想和常用方法，然后再学点初步理论。

微分方程数值解的基本思想和方法就是把微分方程离散成差分方程。不同的离散方法导致不同的求解公式。主要做法有：

（一）直接差商法：这就是用差商代替微商。欧勒折线法就是用这个办法得出的求解公式。

（二）泰勒展开法：用泰勒多项式代替未知函数。这一方法可以达到较高的精度，但是复合函数的高阶导数难于计算，所以不利于直接应用。由于梯形法中平均斜率的启示，构造了精度较高的龙格-库塔公式。这个公式所用的间接泰勒展开法和平均斜率的思想应该掌握。

（三）数值积分法：用不同的求积公式导出不同的离散化公式。搞清怎样由矩形公式导出欧勒公式、由线性插值导

出改进的欧勒公式、由高阶插值导出线性多步法。

在学习上述内容的时候，要区分单步法和多步法、显式和隐式在解法上的特点。并且注意把两者结合起来的预估校正法在常微分方程数值解中的独特效果。联系先前学到的事后估计法，会对这一方法有更深的理解。

关于收敛性和稳定性，初学的时候，可以只讨论单步法。搞清什么是局部截断误差、什么是整体截断误差、收敛性和稳定性有什么关系、什么是绝对稳定区域等概念。至于线性多步法的有关性质，可作为进一步学习的要求。

十　偏微分方程边值问题的数值解

本节内容是计算方法中最难的部分。学习它又需要偏微分方程、泛函分析、变分法和力学等多方面的预备知识，因此虽然很重要，但毕竟不属于计算数学最基础的知识。所以这里只作一点介绍。

有限差分法和有限元法是解偏微分方程边值问题的两种主要数值方法。如求解常微分方程那样，求偏微分方程的数值解，首先也要把连续问题离散化，作为它的第一步是对求解区域作网格剖分，同时用有限个网格节点代替连续区域。第二步是对微分算子离散化，从而把微分方程定解问题转化成线性代数方程组的求解问题。第一步是这两种方法所共同的，区别在于第二步。差分法是从定解问题的微分或积分形式出发的，用数值积分或数值微分公式导出相应的线性代数方程组。而有限元方法却是利用最小位能原理或虚功原理把微分方程化成和它等价的变分问题，从定解问题的变分原理出发，用里兹-加辽金方法导出相应的线性方程组。但它和

传统的里兹-加辽金方法有所不同，它采用样条函数的方法，提出了一种选取局部基函数的新技巧，克服了选取基函数的困难。它比差分法有更大的灵活性并具有直接的物理背景，目前应用得比较广泛。但是在规则区域和某些情况下用差分法有它方便的地方，因此两种方法都不能偏废。

十一 自我测试题

1. 如果 $a=1.1062$，$b=0.947$ 是经舍入后得到的近似值，问 $a+b$，$a\times b$ 有几位有效数字？

2. $y=\sqrt{x}$ 在 $x=100$，121，144 三处的值是容易求得的。试以这三点建立 $y=\sqrt{x}$ 的二次插值多项式，再用这多项式计算 $\sqrt{115}$ 的近似值，并给出误差估计。用其中的任意二点构造线性插值函数，用得到的三个线性插值函数计算 $\sqrt{115}$ 的近似值，并分析结果不同的原因。

3. 用 $\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ 计算 π。

（1）把 $[0,1]$ 区间10等分，用矩形、梯形和抛物线公式计算 π，并和精确值比较。

（2）如果要求计算精度是 10^{-3} 和 10^{-4}，估计梯形法和抛物线法的 n 应取多少？

4. 用逐次分半加速收敛方法计算积分 $\int_1^9\sqrt{x}\,dx$，要求误差小于 10^{-5}，并和四阶高斯公式计算结果进行比较。

5. 用 LU 分解把

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 9\\ 1 & 2 & -6\end{pmatrix}$$

分解成单位下三角阵和上三角阵的乘积。

6. 用主元消去法解线性方程组

$$\begin{cases}3x_1-x_2+4x_3=7,\\ -x_1+2x_2-2x_3=-1,\\ 2x_1-3x_2-2x_3=0。\end{cases}$$

7. 用简单叠代法、塞德尔叠代法和取$\omega=1.46$的超松驰叠代法，解线性方程组（$x_0=(1,1,1,1)$，五次）

$$\begin{cases}2x_1-x_2=1,\\ -x_1+2x_2-x_3=0,\\ -x_2+2x_3-x_4=1,\\ -x_3+2x_4=0。\end{cases}$$

（答：五次结果	x_1	x_2	x_3	x_4
简单叠代	1.16	1.22	1.53	0.69
塞德尔	1.17	1.36	1.57	0.78
超松驰	1.21	1.40	1.59	0.80
精确解	1.20	1.40	1.60	0.80）

8. 用幂法计算

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 4 & 4 & -1\\ 6 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

的绝对值最大特征值和相应特征向量。

〔答：取$x_0=(1,1,1)$叠代10次得到最大特征值是7，相应特征向量是$x_{10}=(0.3000,\ 0.0667,\ 1)^T$。〕

9. 方程$x^3-x^2-1=0$在$x_0=1.5$附近有根。把方程写成三种等价形式：

（1） $x=1+\frac{1}{x^2}$ 对应叠代格式 $x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n^2}$，

（2） $x^3=1+x^2$ 对应叠代格式 $x_{n+1}=\sqrt[3]{1+x_n^2}$，

（3） $x^2=\frac{1}{x-1}$ 对应叠代格式 $x_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{x_n-1}}$，

判断叠代格式在 $x_0=1.5$ 的收敛性，并估计收敛速度。选一种收敛格式计算1.5附近的近似根，要求有四位有效数字。

〔答：(1)，(2)收敛，近似根 $x\approx1.465$，(3)发散。〕

10．用对分区间套法和牛顿法求方程

$$x^3-3x-1=0$$

在$x_0=2$附近的实根，精确到四位有效数字。

11．用龙格-库塔方法计算

$$\begin{cases} y'=y-\frac{2x}{y}, \\ y(0)=1 \end{cases}$$

的数值解（$h=0.2$ 在[0,1]上计算）。

12．用阿达姆斯方法计算

$$\begin{cases} y'=-xy^2, \\ y(0)=2 \end{cases}$$

的数值解（$h=0.2$ 在[0,1]上计算）。

后　记

这本《大学数学自学指南》侧重于在方法上给读者提供指导，限于篇幅，有些问题可能也还没有讲透。这是一部集体编写的书，由于参加编写的同志经验不同，各门课的特点也有所不同，因此，各章的风格也不尽相同。

参加本书编写工作的有赵慈庚、陈绍菱、薛宗慈、邝荣雨、刘云英、马遵路、陈方权、蒋铎、朱鼎勋、徐承彝、洪吉昌、沈嘉骥十二位同志，分别负责编写的部分都在各章章名下署了名。

我们学识疏浅，经验不多，书中不恰当的地方，希望不吝指教。